

# CASCADES INFINIMENT DIVISIBLES VOILÉES : AU-DELÀ DES LOIS DE PUISSANCE

P. Chainais ,

LIMOS UMR 6158,  
ISIMA - Univ. Clermont II  
Clermont-Ferrand

R. Riedi ,

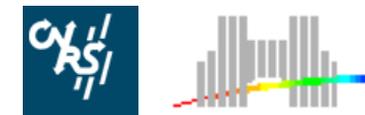
Dept of ECE,  
Rice University,  
Houston Texas, USA

P. Abry

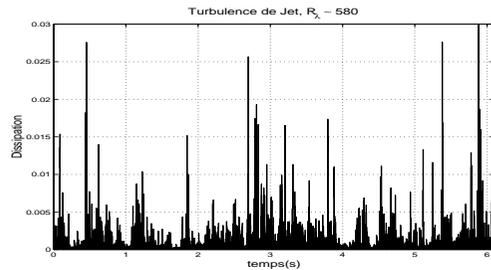
CNRS UMR 5672,  
Laboratoire de Physique,  
E.N.S. Lyon



RICE UNIVERSITY

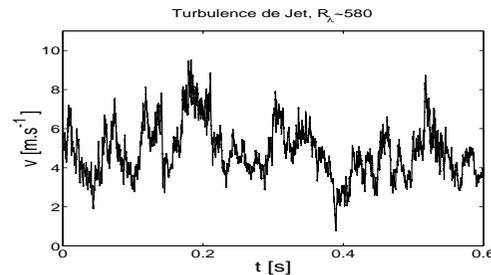


# Lois d'échelle et Turbulence



dissipation

$$E \varepsilon_r^q \sim r^{\tau(q)}$$



vitesse

$$E |\delta v_r|^q \sim r^{q/3 + \tau(q/3)}$$

## ANALYSE

formalisme multifractal ( $\sim \tau^{\zeta(q)}$ )  
 casc. log-inf. div. ( $H(q) \cdot n(\tau)$ )  
 cascades multiplicatives  
 $\Rightarrow$  phénoménologie  
 (cascade de Richardson)

## SIMULATION

cascades binomiales,  
 coeff. ondelette, MRW...  
 cascades multiplicatives  
 $\Rightarrow$  algorithmes  
 (binomiale, ondelettes...)

## Lois d'échelle infiniment divisibles

$$\mathbb{E} |\delta_\tau X|^q = c_q \exp[-H(q) \cdot n(\tau)]$$

✓  $n(\tau) = -\log \tau \implies \mathbb{E} |\delta_\tau X|^q = c_q \tau^{H(q)} \equiv c_q \tau^{\zeta(q)}$   
(invariance d'échelle)

✓  $n(\tau) \neq -\log \tau \implies$  vers une analyse non-invariante d'échelle :

– turbulence                      Castaing et al. 1990

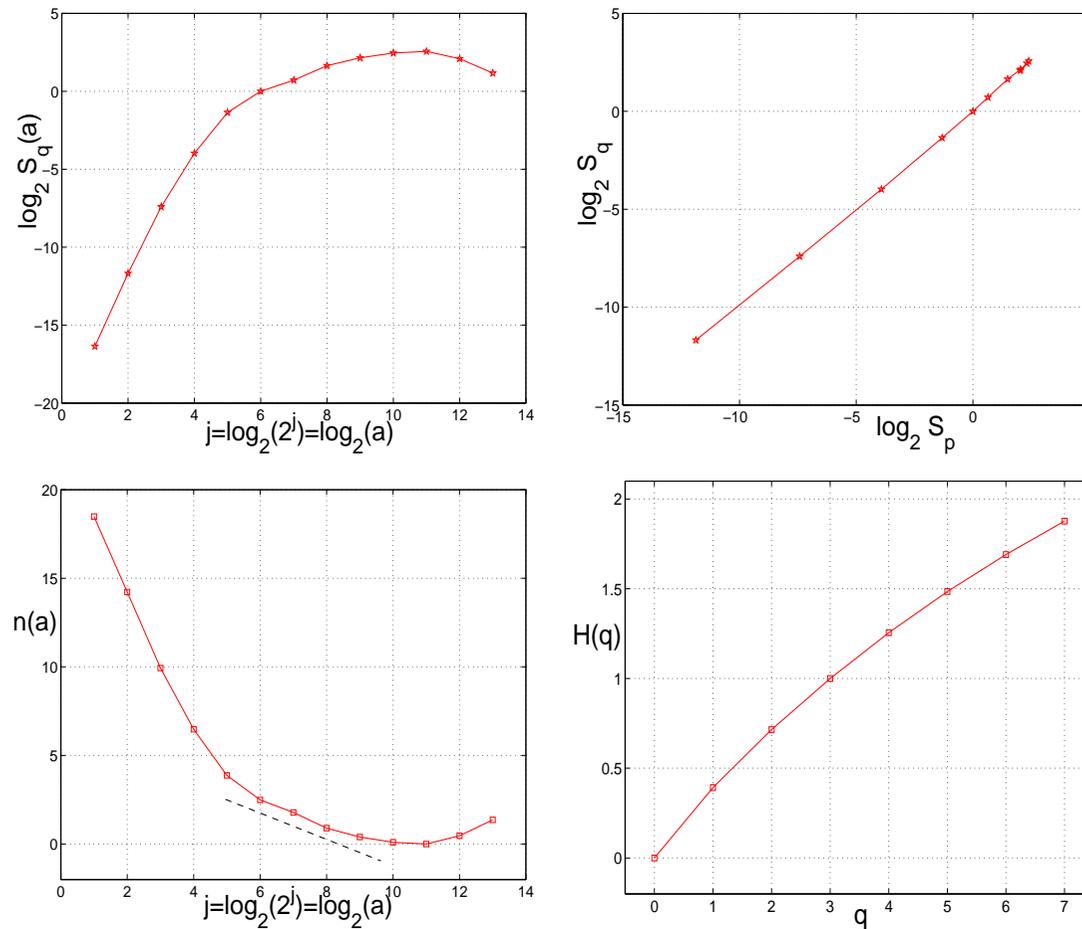
– trafic internet                  Veitch et al. 2000

✓ interprétation multiplicative

### Comment construire un signal à lois d'échelle infiniment divisibles ?

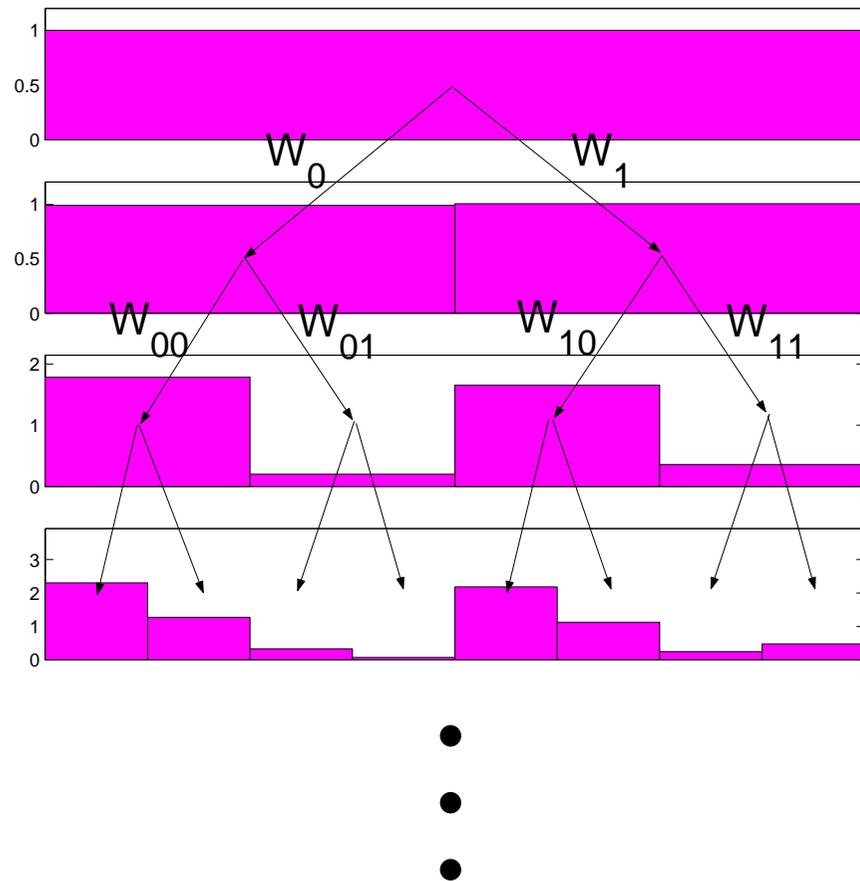
possédant de "bonnes propriétés" : *accroissements stationnaires*, etc. ...

# Exemple : LID en turbulence

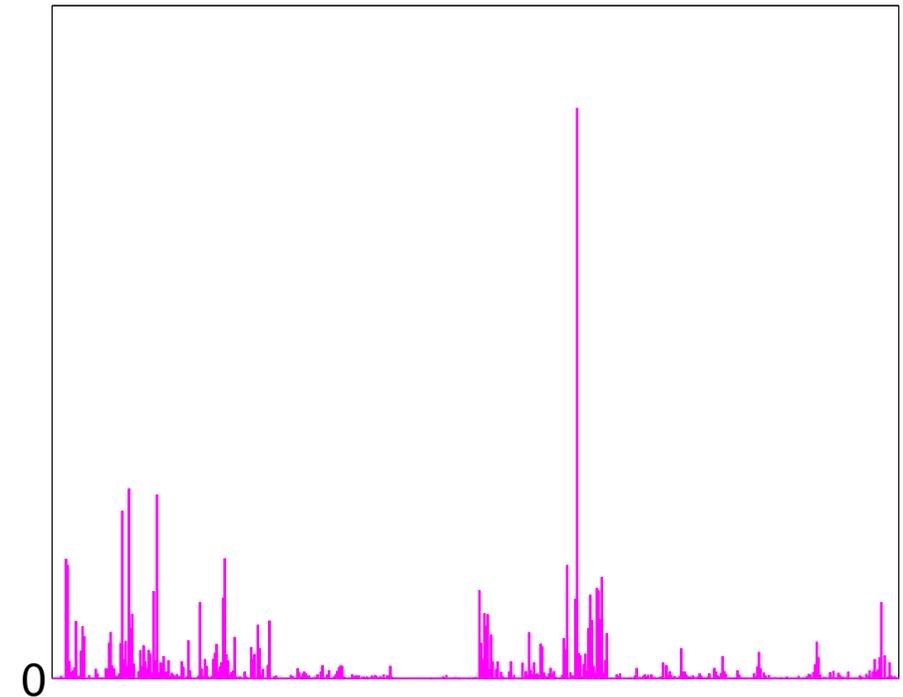


# Principe des cascades binomiales

structure arborescente

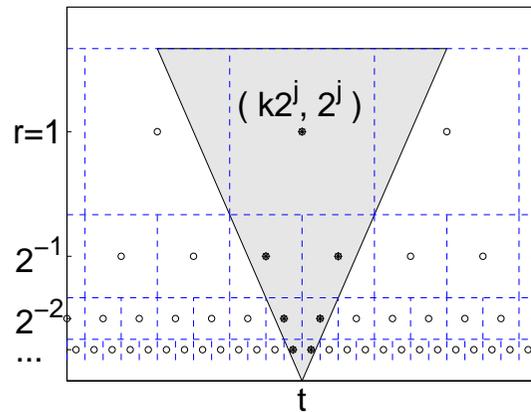


signal irrégulier



# Des cascades binomiales aux cascades infiniment divisibles

binomiale

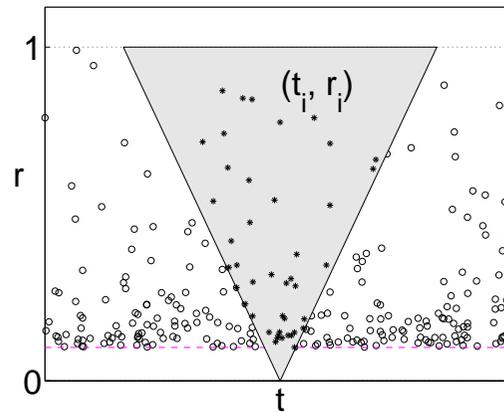


$$Q_r(t) = \prod_j \Lambda_j(t),$$

$r = 2^j$  seulement

Mandelbrot 1974

Poisson composée



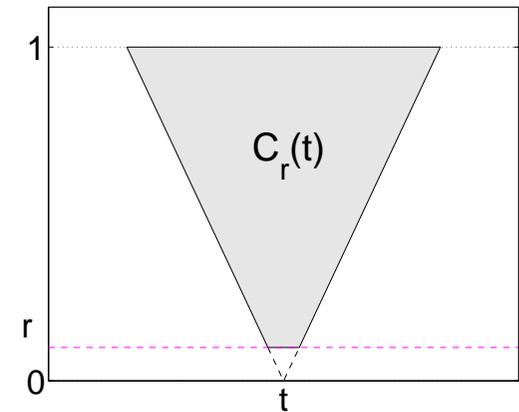
$$Q_r(t) \propto \prod_{(t_i, r_i)} W_i$$

$t_i$  : uniforme  $\Rightarrow$  stationnaire

$r_i$  :  $1/r^2 \Rightarrow$  scaling

Barral & Mandelbrot 2002

Infiniment Divisible



$$Q_r(t) \propto \exp M(C_r(t))$$

CASCADE MULT.  
CONTINUE

Schmitt & Marsan 2001

Muzy & Bacry 2002

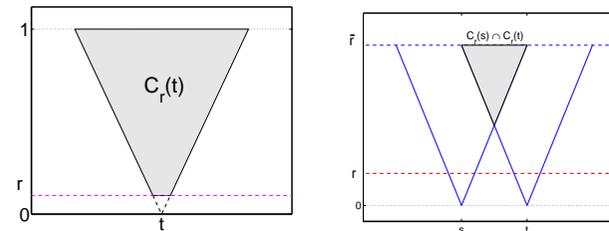
Ch. & Riedi & Abry 2003

## Bruit log-infiniment divisible (IDC noise)

$\mathbf{M}(\mathcal{C}_r(\mathbf{t}))$  : fct. génér. moments =  $\exp[-m(\mathcal{C}_r) \rho(q)]$  (inv. éch. =  $r^{\rho(q)}$ )

- $G$  = distr. infiniment divisible, fct. génér. moments  $\tilde{G}(q) = e^{-\rho(q)}$ ,
- mesure positive  $dm(t, r)$  [i. é. =  $\frac{(1+\delta(1-r))dt dr}{r^2}$ ],

$$Q_r(t) = \frac{\exp[M(\mathcal{C}_r(t))]}{\mathbb{E}[\exp M(\mathcal{C}_r(t))]}$$



$\implies Q_r(t)$  est stationnaire

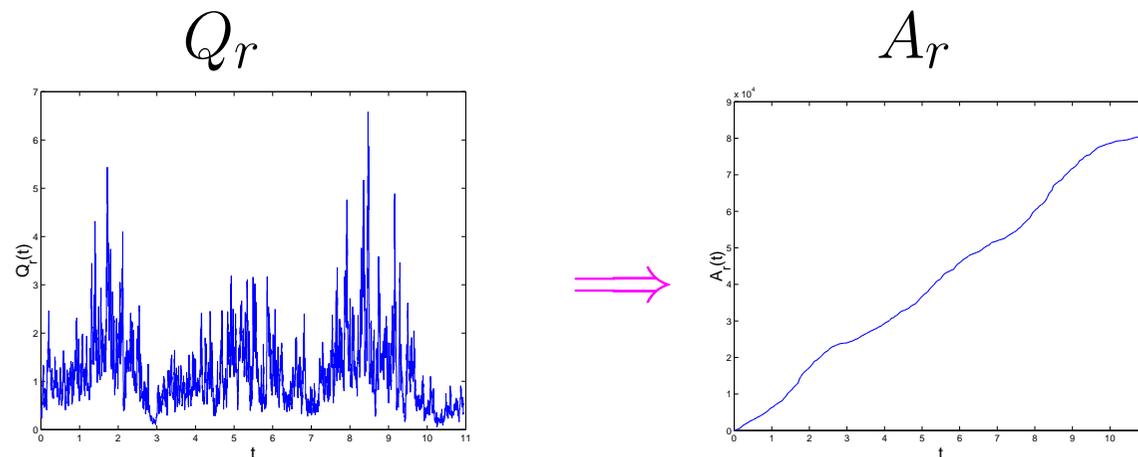
$$\varphi(q) = \rho(q) - q\rho(1) \implies \mathbb{E}[Q_r^q] = \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_r)]$$

$$[\text{i.é. } \mathbb{E}[Q_r^q] = e^{-\varphi(q)} \cdot r^{\varphi(q)}]$$

# Mouvement log-infiniment divisible (IDC motion)

**Pb :**  $Q_r$  dégénère lorsque  $r \rightarrow 0 \dots$

**Solution :**  $A_r(t) = \int_0^t Q_r(s) ds \implies \mathbb{E}A_r(t) = t$



$A(t) = \lim_{r \rightarrow 0} A_r(t) \dots$  est à accroissements stationnaires

et  $\mathbb{E}\delta_\tau A^q \sim \tau^q \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_\tau)]$

## Marche aléatoire infiniment divisible (IDC random walk)

mouvement Brownien fractionnaire  $B_H$ ,  $A(t)$  une mesure Log. Inf. Div.,

$$V_H(t) = B_H(A(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Rappel  $\left\{ \begin{array}{l} B_H \text{ est à accroissements stationnaires} \\ \forall t \in \mathbb{R}^+, \mathbb{E}|B_H(t)|^q = t^{qH} \cdot \mathbb{E}|B_H(1)|^q, \end{array} \right.$

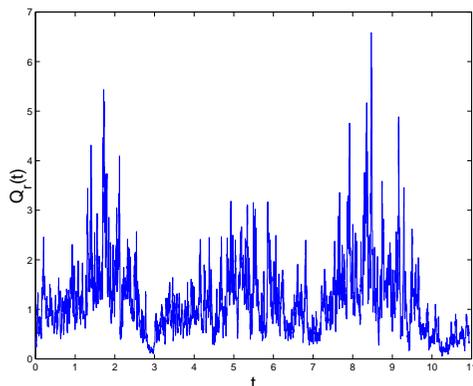
$V_H$  est à accroissements stationnaires,  
fluctuations positives/négatives,

et

$$\mathbb{E}|\delta_\tau V_H|^q \sim \tau^{qH} \exp[-\varphi(qH)m(\mathcal{C}_\tau)]$$

## En résumé...

bruit  
(densité)

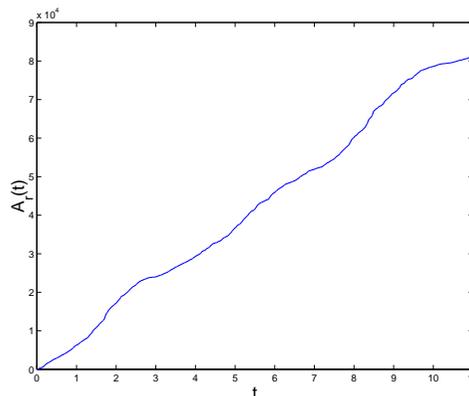


$$\mathbb{E}[Q_r^q]$$

||

$$\exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_r)]$$

mouvement  
(mesure)

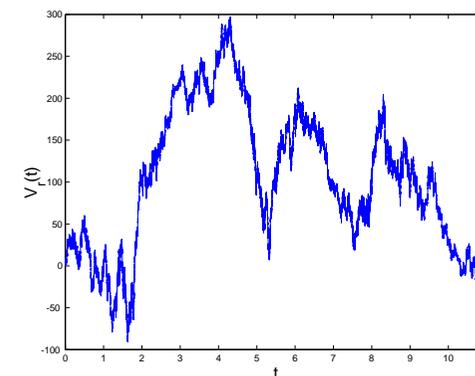


$$\mathbb{E}\delta_\tau A^q$$

$\mathcal{N}$

$$\tau^q \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_\tau)]$$

marche aléatoire



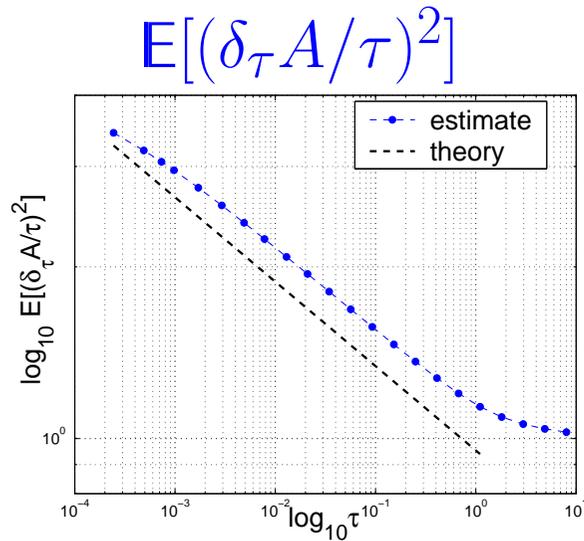
$$\mathbb{E}|\delta_\tau V_H|^q$$

$\mathcal{N}$

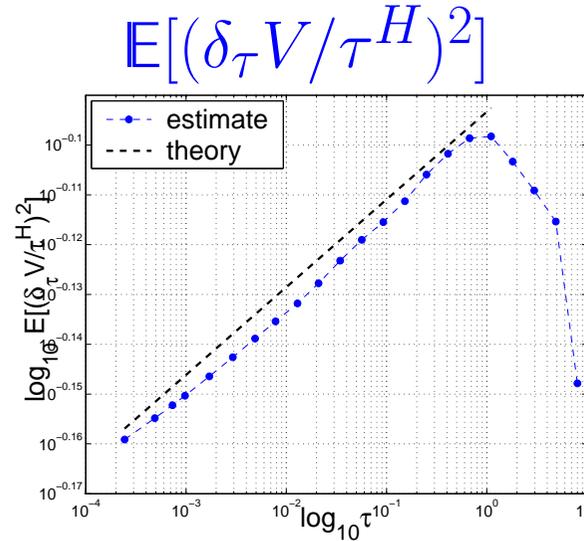
$$\tau^{qH} \exp[-\varphi(qH)m(\mathcal{C}_\tau)]$$

- temps continu ( $t \in \mathbb{R}^+$ ), accroissements stationnaires, invariance d'échelle continue,  $\forall \varphi(q)$  d'une distribution Inf. Div.,
- procédures **MATLAB**

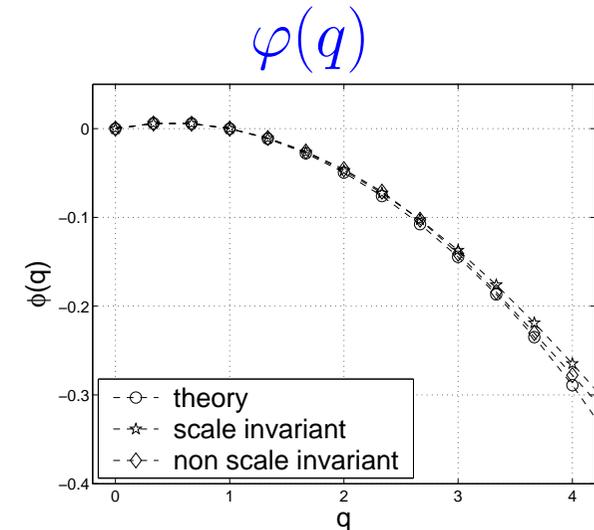
# Invariance d'échelle et lois de puissance



$\varphi(2) \log \tau$



$\varphi(2H) \log \tau$



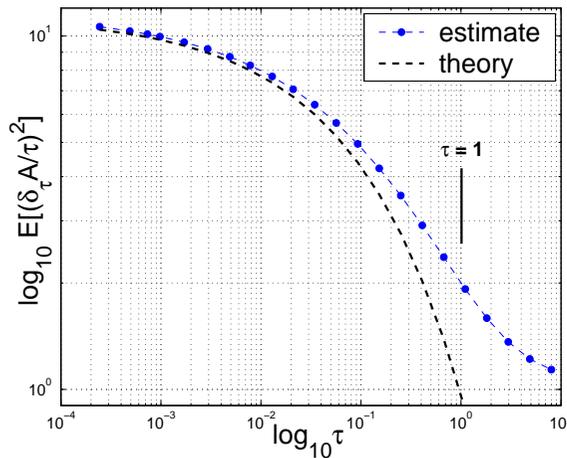
comportements **linéaires** dans diagrammes log-log



**LOIS DE PUISSANCE**

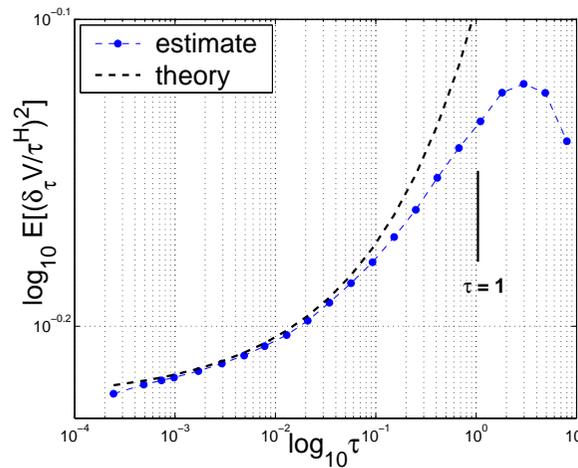
# Au-delà des lois de puissance...

$$E[(\delta_\tau A/\tau)^2]$$



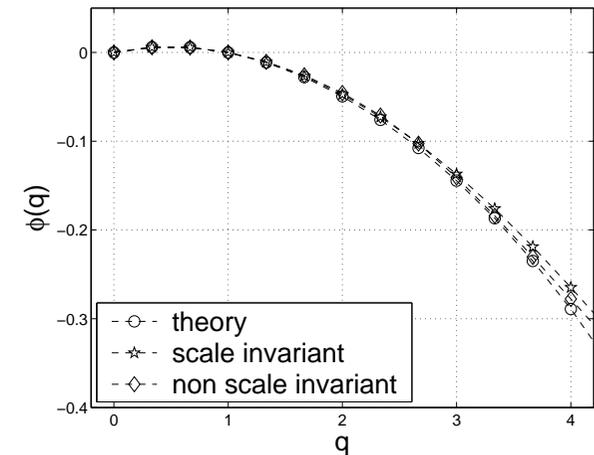
$$-\varphi(2)m(\mathcal{C}_\tau)$$

$$E[(\delta_\tau V/\tau^H)^2]$$



$$-\varphi(2H)m(\mathcal{C}_\tau)$$

$$\varphi(q)$$



comportements **non-linéaires** dans diagrammes log-log

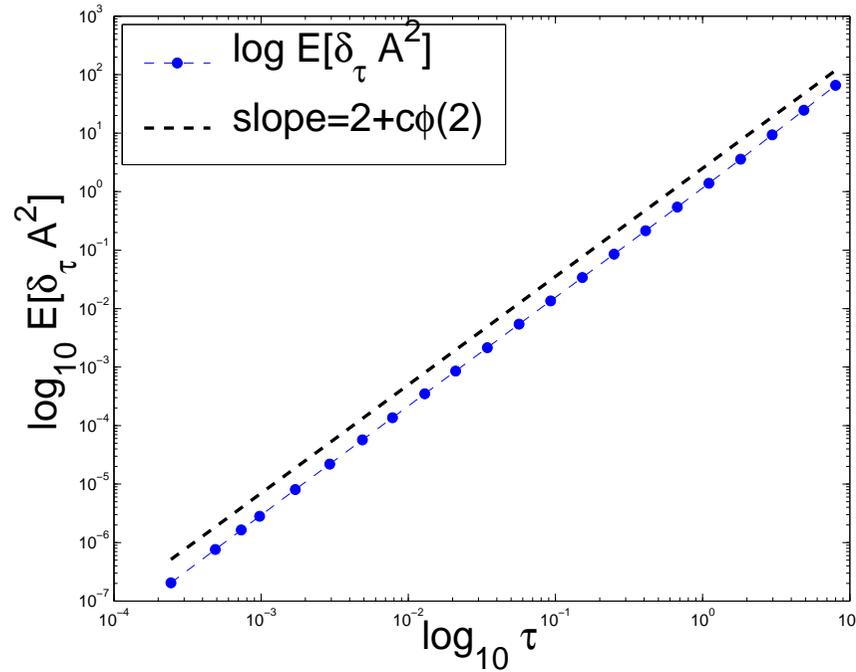


~~LOIS DE PUISSANCE~~

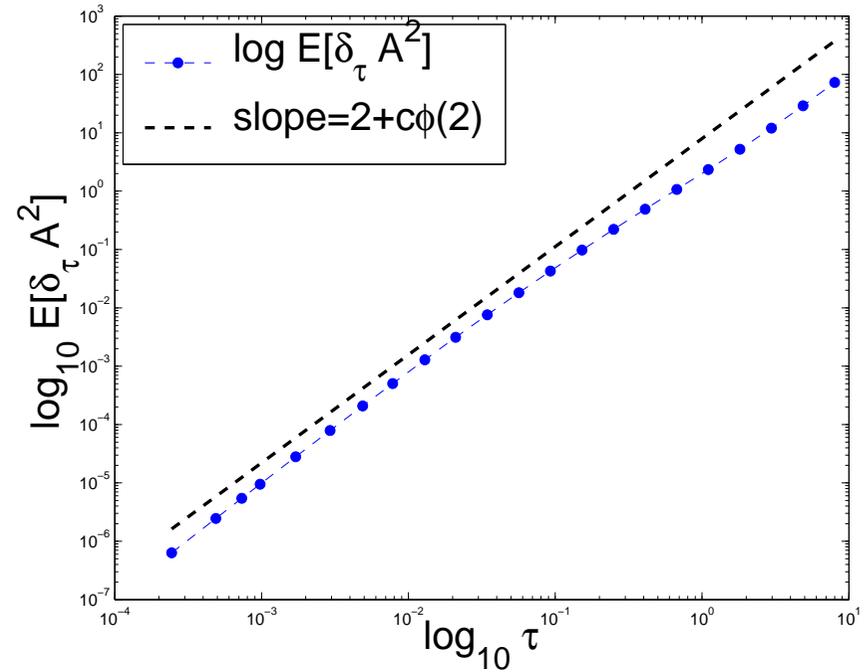
**cascade voilée**

# $E\delta_\tau A^2$ multifractale / voilée

MULTIFRACTALE



VOILÉE



## Exemple simple

$$dm(t, r) = \frac{dt dr}{r^{2+\beta}}$$

alors

$$m(\mathcal{C}_\tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{\sim} \begin{cases} \tau^{-\beta} & \text{si } \beta > 0, \\ -\ln \tau & \text{si } \beta = 0, \\ \frac{1 - \tau^{-\beta}}{\beta} \rightarrow \text{Cte} & \text{si } \beta < 0. \end{cases}$$

▼ Analyse Multifractale  $\implies \lim_{\tau \rightarrow 0}$

donc le cas  $\alpha > 1$  est sans intérêt en terme d'analyse multifractale ( $\sim \tau^q$ ).

▲ Analyse LID  $\implies \cancel{\lim_{\tau \rightarrow 0}}$

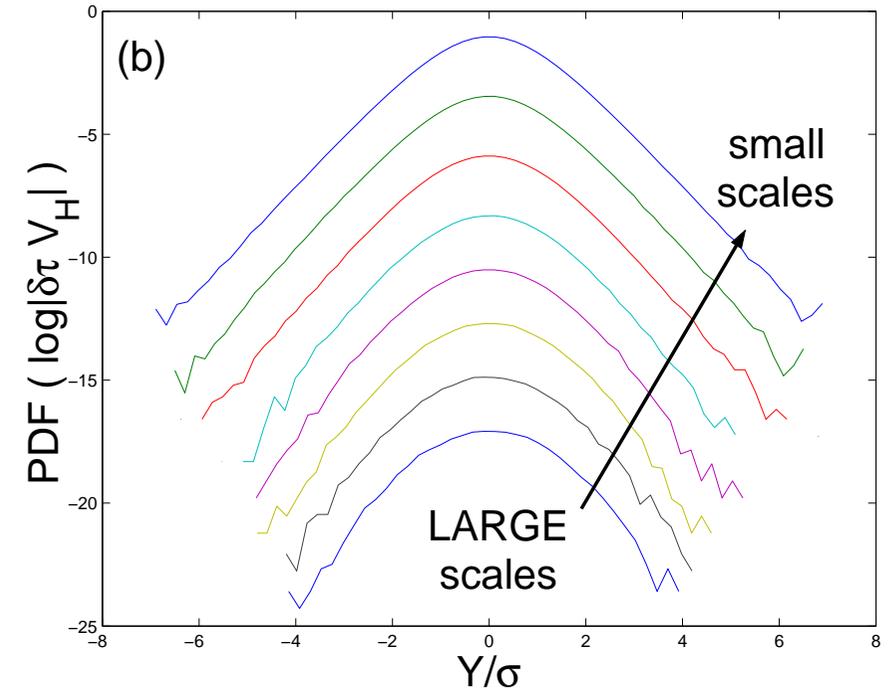
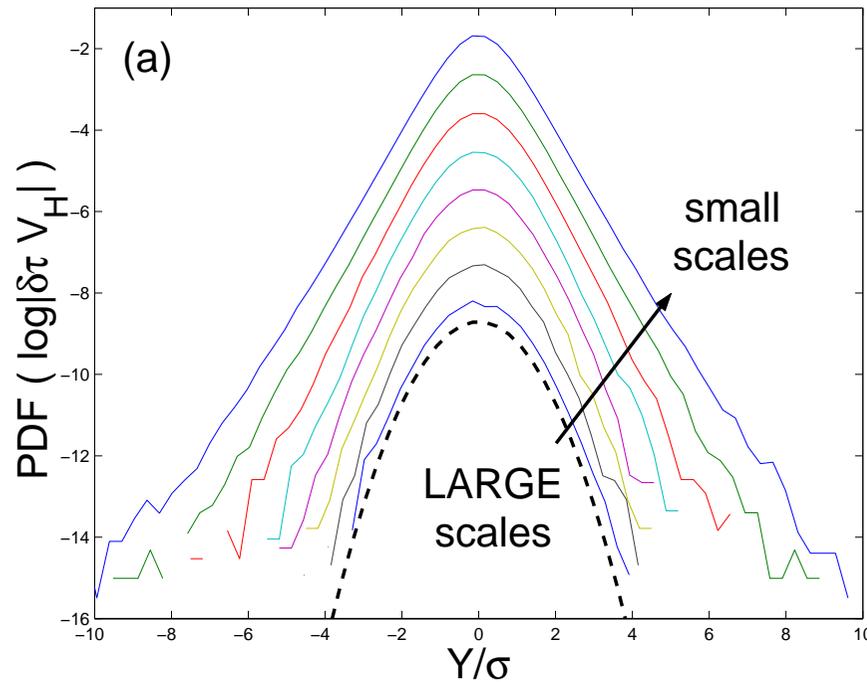
intérêt = évolution à travers les échelles

# Evolution des densités de probabilité

**MULTIFRACTALE**

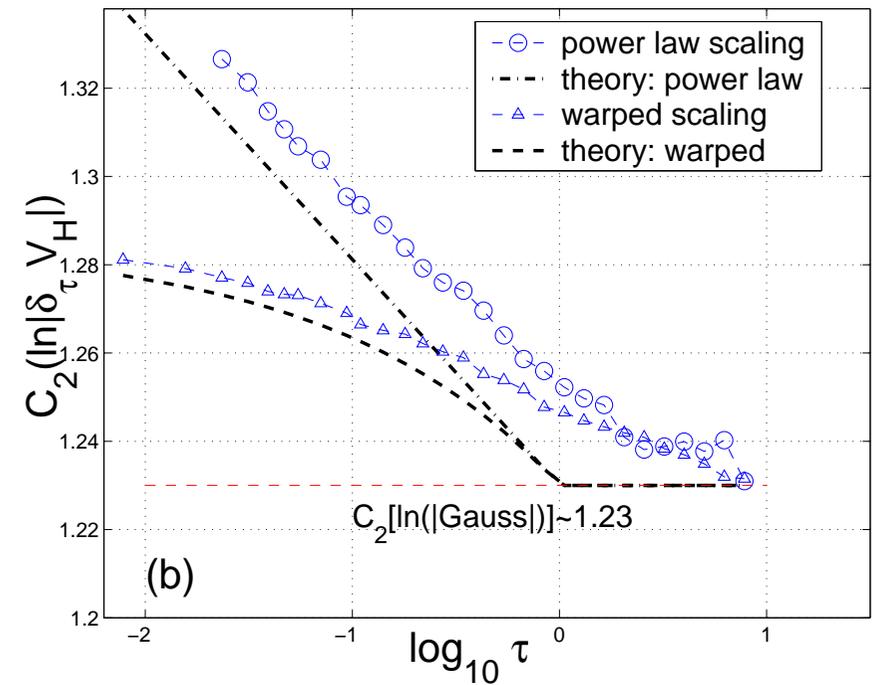
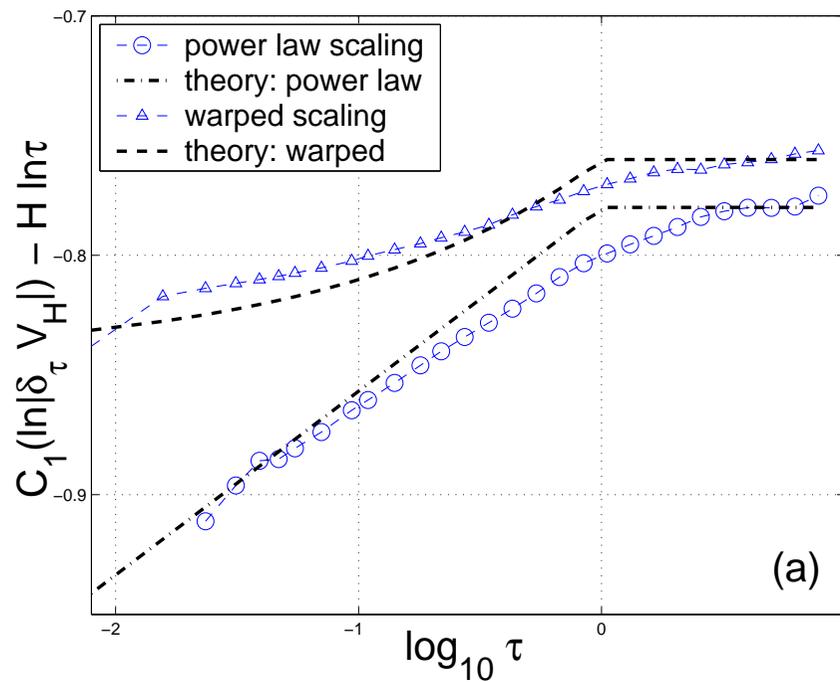
$\neq$

**VOILÉE ( $\beta = -0.4$ )**



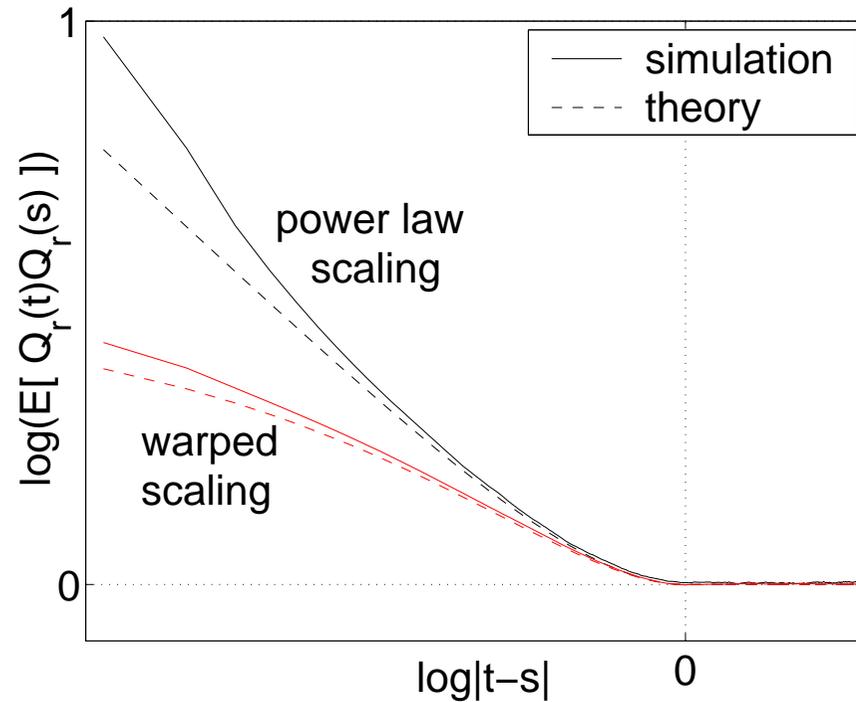
de gaussien vers *non gaussien* vers petites échelles  
(ex : kurtosis...)

# Cumulants du log des accroissements de $V_H$

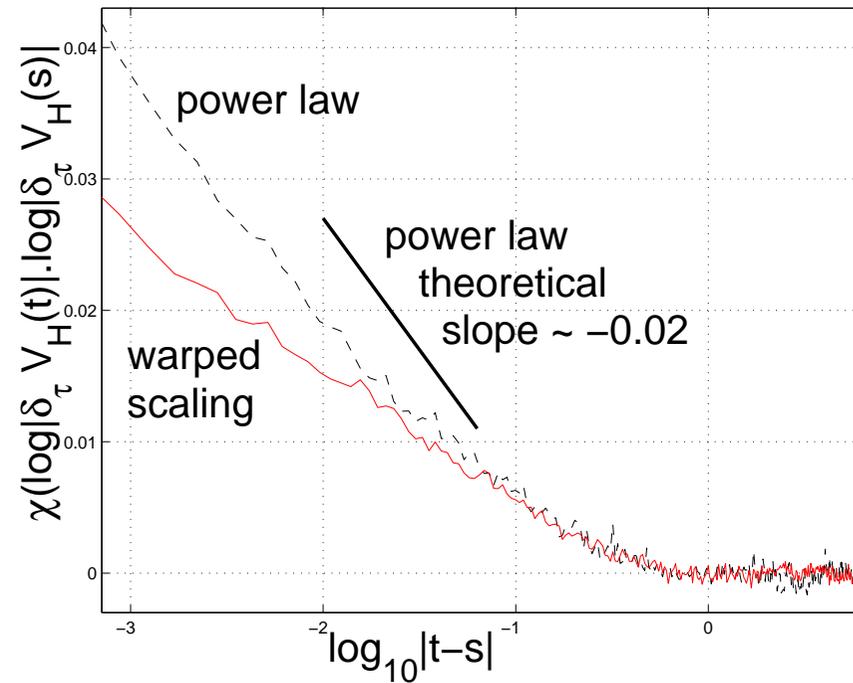


(a)  $C_1 - H \ln \tau \simeq -H \varphi'(0) m(\mathcal{C}_\tau)$     (b)  $C_2 \simeq -H^2 \varphi''(0) m(\mathcal{C}_\tau)$

# Fonctions d'autocorrélation "voilées"



$$E[Q_r(t)Q_r(s)]$$



$$\text{Autocorrélation de } \ln |\delta_\tau V_H|$$

## Bilan provisoire

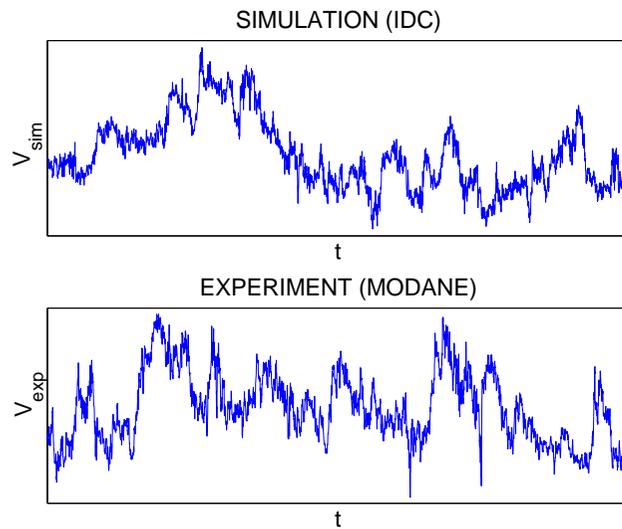
- ✓ modèles Log-Inf. Div. simulables,
- ✓ **cascades voilées** : *premier écart contrôlé aux lois de puissance,*
- ✓ **déception** : l'effet existe mais reste faible,
- ✓ **applications** : turbulence, trafic internet, finance...

## Et après ?

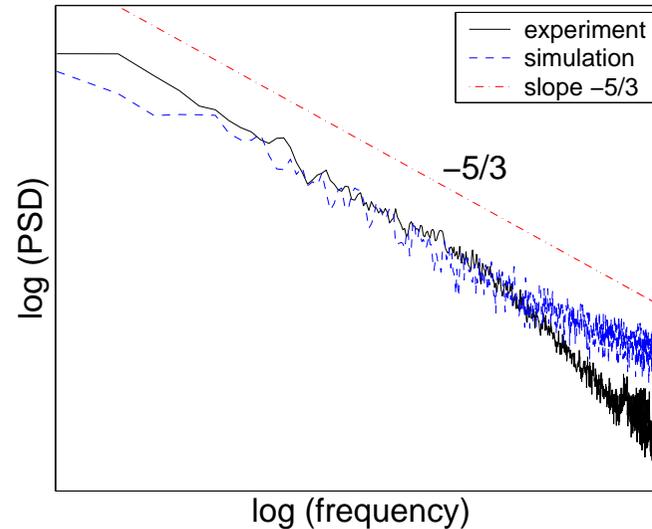
- ✓ encore plus loin des lois de puissance, c'est possible ?...
- ✓ d'autres pistes que les CLID ? (pb de l'intégration...)
- ✓ skewness ?
- ✓ analyse : estimation, prédiction...
- ✓ CLID multidimensionnelles
- ✓ banque d'algorithmes de synthèse.

# CLID vs modèle She-Lévêque et signal "Modane"

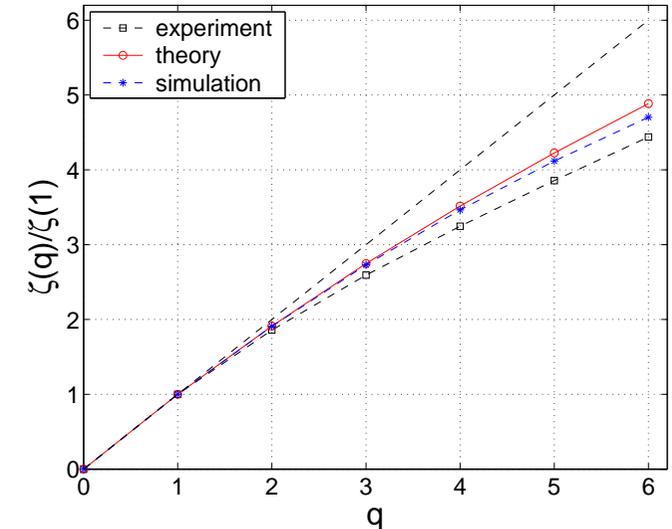
≡ marche aléatoire Log-Inf. Div.  $V_H$  versus vitesse  $v$



$V_H$  versus Modane



Spectres



Exposants  $\zeta(q)$

⇒⇒ signal artificiel respectant le modèle de She-Lévêque