

# Intégrales stochastiques et cascades multiplicatives log-stables

Pierre CHAINAIS<sup>1</sup>, François SCHMITT<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LIMOS CNRS UMR 6158

Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand II - Campus des Cézeaux 63173 Aubière

<sup>2</sup>CNRS FRE 2816 ELICO, Station Marine de Wimereux,

Université des Sciences et Technologies de Lille - Lille 1, 28 av. Foch, 62930 Wimereux

`pierre.chainais@isima.fr`, `francois.schmitt@univ-lille1.fr`

**Résumé** – Nous nous intéressons à la description de cascades multiplicatives log-stables dans un espace à  $D$  dimensions par des intégrales stochastiques. Nous établissons une correspondance claire entre différents travaux qui décrivent certains processus  $\alpha$ -stables multifractals soit comme des cascades multiplicatives, soit à partir d'intégrales stochastiques. Nous obtenons une description originale de processus multifractals comme l'exponentielle d'intégrales stochastiques comparables (mais pas identiques) à des cascades multiplicatives  $\alpha$ -stables. Nous étendons nos résultats à la description de processus scalaires à  $D$  dimensions d'espace et évoluant en temps de manière causale. En dimension 2+1 (2 dimensions d'espace, 1 de temps) nous obtenons une méthode causale de synthèse numérique de "films stochastiques" associés à des processus log-stables.

**Abstract** – We focus on the description of log-stable multiplicative cascades in a  $D$ -dimensional space by stochastic integrals. We establish a clear correspondence between various works that describe certain  $\alpha$ -stable multifractal processes either thanks to multiplicative cascades or thanks to stochastic integrals. We obtain an original description of multifractal processes thanks to the exponential of stochastic integrals which are similar but not identical to  $\alpha$ -stable multiplicative cascades. We generalize our results to the description of  $D$  dimensional scalar processes that moreover obey some causal time evolution. In dimension 2+1 (2 space dimensions, 1 time dimension) we obtain a causal numerical method to synthesize "stochastic films" associated to log-stable multifractal processes.

## 1 Introduction

L'analyse multifractale a été utilisée dans de nombreux domaines allant de la turbulence en mécanique des fluides à l'étude de l'ADN en biologie. Une problématique complémentaire de l'analyse de données expérimentales est la construction de processus multifractals modèles. Ces dernières années, un ensemble de travaux [2, 5, 6, 8, 11, 13] a introduit la famille des *cascades infiniment divisibles*, une grande famille de processus multifractals possédant de "bonnes propriétés" (stationarité, lois d'échelles continues...). Ces définitions ont été étendues en dimension  $D \geq 2$  [3], la dimension  $D = 2$  s'avérant particulièrement pertinente pour la modélisation des images naturelles et la synthèse de texture [4].

Nous revenons sur ces différentes approches pour la sous-classe des cascades  $\alpha$ -stables (dont le cas gaussien) en dimension  $D$ . Nous nous intéressons en particulier à leur description par une intégrale stochastique telle que proposée dans [11] dans le cas gaussien en dimension 1.

La motivation initiale de ce travail est essentiellement théorique puisqu'il s'agit d'abord d'explicitier et de clarifier les liens entre différentes descriptions d'objets finalement très semblables. Cependant, la description d'un proces-

sus multifractal en fonction d'une intégrale stochastique stable s'avère très utile en pratique puisqu'elle fournit une méthode de synthèse numérique beaucoup plus simple à implémenter que les cascades multiplicatives  $\alpha$ -stables par exemple. Enfin, notons qu'il est alors possible de simuler une texture multifractale  $\alpha$ -stable animée dont l'évolution en temps est non seulement multifractale mais aussi causale.

## 2 Cascades infiniment divisibles : différentes approches.

Nous rappelons la définition des cascades infiniment divisibles (CID) qui sont essentiellement des processus positifs pouvant être vus comme des cascades multiplicatives continues en échelle ne reposant sur aucune structure arborescente.

Soit  $G(X)$  une distribution infiniment divisible décrite par la fonction génératrice des moments  $\tilde{G}(q) = \mathbb{E}(e^{qX}) = e^{-\rho(q)}$ . Il existe une grande variété de distributions infiniment divisibles [7]. Nous ne nous intéressons ici qu'à la loi normale pour laquelle  $\rho(q) = -\mu q - \frac{\sigma^2}{2} q^2$  et aux lois  $\alpha$ -stables telles que  $\rho(q) = -\mu q - \sigma^\alpha q^\alpha$  ( $0 < \alpha < 2$ ).

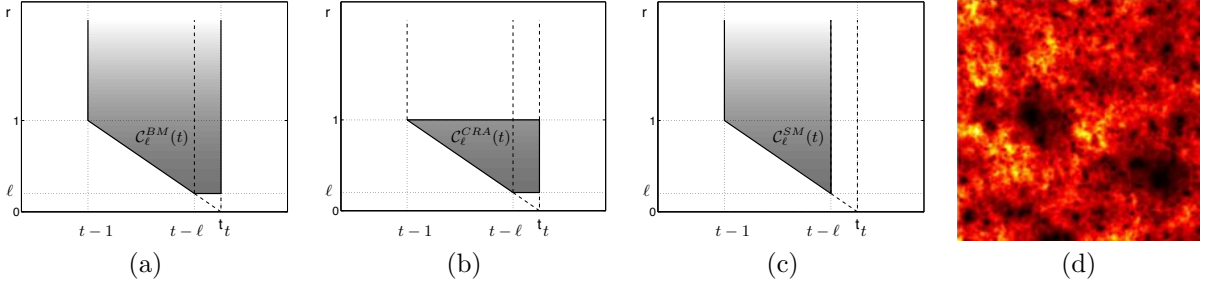


FIG. 1 – Cône  $\mathcal{C}_\ell(t)$  proposé par (a) Bacry & Muzy [8], (b) Chainais, Riedi & Abry [6]; (c) Schmitt & Marsan [13]. (d) Exemple de réalisation obtenue en utilisant (13) pour  $\alpha = 1.5$ .

Soit  $dm(\mathbf{x}, r) = \frac{C(D)}{r^{D+1}} d\mathbf{x}dr$  une mesure positive sur le demi espace-échelle  $\mathcal{P}^+ := \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^+$ ; ce choix est imposé par l’invariance d’échelle. Soit  $M$  une mesure stochastique additive indépendante (appelée “mesure stochastique infiniment divisible” ci-dessous) sur  $\mathcal{P}^+$ , distribuée par  $G$ , et associée à la mesure de contrôle  $dm(\mathbf{x}, r)$ . Pour tout sous-ensemble  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}^+$ , la mesure stochastique  $M(\mathcal{E})$  de  $\mathcal{E}$  est une variable aléatoire telle que  $\mathbb{E}[e^{qM(\mathcal{E})}] = e^{-\rho(q)m(\mathcal{E})}$ . Pour tout couple de sous-ensembles disjoints  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ ,  $M(\mathcal{E}_1)$  et  $M(\mathcal{E}_2)$  sont des variables aléatoires indépendantes. La propriété d’additivité de  $M$  se traduit par  $M(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) = M(\mathcal{E}_1) + M(\mathcal{E}_2)$  [9, 10].

A résolution  $0 < \ell \leq 1$  fixée, soit  $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})$  le cône d’influence<sup>1</sup> défini pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$ . En dimension 1 (dans ce cas,  $t \equiv \mathbf{x}$ ), différents choix ont été proposés :

- dans [1, 8],  $\mathcal{C}_\ell^{BM}(t) = \{(t', r') : \ell \leq r' \leq 1, t - r' \leq t' \leq t\} \cup \{(t', r') : t - 1 \leq t' \leq t, r' \geq 1\}$  – fig. 1(a);
- dans [6],  $\mathcal{C}_\ell^{CRA}(t) = \{(t', r') : \ell \leq r' \leq 1, t - r' \leq t' \leq t\}$  – fig. 1(b).

où les versions causales ont été utilisées. Alors, une cascade infiniment divisible invariante d’échelle est une famille de processus  $Q_\ell(\mathbf{x})$  paramétrée par  $\ell$  de la forme

$$Q_\ell(\mathbf{x}) = \frac{\exp[M(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x}))]}{\mathbb{E}[\exp M(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x}))]} \quad (1)$$

Dans le cas où la distribution  $G$  est une loi  $\alpha$ -stable, nous montrerons que la définition (1) peut prendre une forme simple faisant intervenir une intégrale stochastique relativement à un mouvement stable. Une description de ce type a déjà été proposée et étudiée dans [11, 13] pour le cas gaussien en dimension 1 sous la forme :

$$\epsilon_\lambda(t) = \lambda^{-\sigma^2/2} \exp\left(\sigma \int_{t+1-\lambda}^t (t+1-u)^{-1/2} dB(u)\right) \quad (2)$$

où  $\epsilon_\lambda(t)$  joue le rôle de  $Q_\ell(t)$ ,  $\lambda$  joue un rôle équivalent à celui de l’inverse de la résolution  $1/\ell$  ci-dessus,  $dB(u)$  est un mouvement brownien standard et  $\sigma^2$  un paramètre de variance. Rappelons qu’une propriété essentielle de tous les processus décrits ci-dessus est l’invariance d’échelle [3, 8, 13] :

$$\mathbb{E}[Q_\ell^q] = e^{-\varphi(q)m(\mathcal{C}_\ell)} \quad (3)$$

<sup>1</sup> Remarquons que la grande échelle a ici été arbitrairement fixée à 1. Un choix différent  $L \neq 1$  reviendrait à un changement d’unité  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} \cdot L$ ,  $\ell \rightarrow r \cdot L$ .

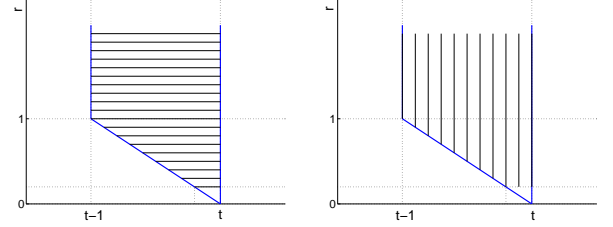


FIG. 2 – (g.) Intégration par rapport à  $t$  puis par rapport à  $r$  : le processus est décrit comme une cascade multiplicative; (dr.) Intégration par rapport à  $r$  puis par rapport à  $t$  : le processus est décrit comme l’exponentielle d’une intégrale stochastique.

où  $\varphi(q) = \rho(q) - q\rho(1)$  pour tout  $q$  tel que  $\rho(q) = -\log \tilde{G}(q)$  est bien définie. Par conséquent, les moyennes par boîtes  $\kappa_r$  à l’échelle  $r \geq \ell$  notées

$$\kappa_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| < r/2} Q_\ell(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (4)$$

vérifient

$$\mathbb{E}\kappa_r(\mathbf{x})^q \sim r^{\tau(q)} \quad (5)$$

où en général  $\tau(q) = \varphi(q)$  au moins dans une certaine gamme de valeurs de  $q$ .

Nous montrons que les cascades  $\alpha$ -stables définies par (1) entretiennent des liens très étroits avec les processus décrits par l’exponentielle d’une intégrale stochastique comme dans (2).

### 3 Cas gaussien en dimension 1.

Dans un premier temps, nous présentons de manière détaillée l’argument concernant les cascades gaussiennes en dimension  $D = 1$ . Cet argument s’étend ensuite assez naturellement en dimension  $D \geq 2$  pour les cascades  $\alpha$ -stables (pour toutes les définitions évoquées précédemment, voir [12]). Une cascade multiplicative est la construction d’un processus à partir de contributions successives de toutes les échelles, des plus grandes au plus petites. Une intégrale stochastique décrit plutôt le processus à partir des contributions pondérées de différents instants ou positions. Nous montrons que le passage d’une description à une autre s’obtient simplement en échangeant l’ordre de deux intégrations, l’une en échelle, l’autre en temps

( $D = 1$ ) lorsqu'on évalue  $M(\mathcal{C}_\ell(t))$ . Or la quantité qui gouverne la structure du processus, donc de  $M(\mathcal{C}_\ell(t))$ , est ici la mesure dite "de contrôle"  $m(\mathcal{C}_\ell(t))$  qui peut se décrire de 2 façons. Dans une approche "cascade multiplicative", on effectuera d'abord l'intégration en temps, puis celle en échelle.

$$\begin{aligned} m(\mathcal{C}_\ell^{BM}(t)) &= \int_\ell^1 \underbrace{\int_{t-r'}^t dt'}_{=r'} \frac{dr'}{r'^2} + \int_1^\infty \underbrace{\int_{t-1}^t dt'}_{=1} \frac{dr'}{r'^2} \\ &= \log(1/\ell) + 1. \end{aligned} \quad (6)$$

La mesure du cône  $\mathcal{C}_\ell$  se décompose alors en la somme des contributions élémentaires des différentes échelles. Si on inverse l'ordre d'intégration, on écrira plutôt

$$m(\mathcal{C}_\ell^{BM}(t)) = \int_{t-1}^{t-\ell} \underbrace{\int_{t-t'}^\infty \frac{dr}{r^2}}_{(t-t')^{-1}} dt' + \int_{t-\ell}^t \underbrace{\int_\ell^\infty \frac{dr}{r^2}}_{\ell^{-1}} dt' \quad (7)$$

Cette décomposition suggère de remplacer la quantité  $M(\mathcal{C}_\ell(t))$  par la quantité  $\tilde{M}_\ell(t)$  :

$$\tilde{M}(t) = \mu \cdot m(\mathcal{C}_\ell(t)) + \sigma \int_{t-1}^t K_\ell(|t-t'|) dB(t'), \quad (8)$$

où l'on a utilisé  $\rho(q) = -\mu q - \frac{\sigma^2}{2} q^2$  pour la distribution  $G = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  dans le cas gaussien et

$$K_\ell(\tau) = \begin{cases} \tau^{-1/2}, & \ell \leq \tau \leq 1, \\ \ell^{-1/2}, & 0 \leq \tau \leq \ell. \end{cases} \quad (9)$$

La quantité  $\tilde{M}_\ell(t)$  se lit alors comme une somme pondérée en temps de termes aléatoires élémentaires successifs indépendants. Observons que le changement de variable  $t' = t - \frac{1}{t+1-u}$  dans (2) donne

$$\epsilon_\lambda(t) = \ell^{\sigma^2/2} \exp \left( \sigma \int_{t-1}^{t-\ell} (t-t')^{-1/2} dB(t') \right), \quad (10)$$

qui correspond exactement au premier terme dans l'exponentielle de (8). La définition (2) est donc très similaire à la définition (1) si l'on choisit le cône  $\mathcal{C}_\ell^{SM}(t)$  représenté figure 1(c).

Remarquons que les quantités  $M(\mathcal{C}_\ell(t))$  dans (1) et  $\tilde{M}(t)$  dans (8) ne sont pas rigoureusement identiques. Elles sont seulement égales en distribution pour un instant  $t$  fixé. Ainsi (8) ne peut pas être écrite simultanément pour deux instant  $t_1 \neq t_2$  avec le même mouvement Brownien. Par conséquent les processus  $Q_\ell$  de (1) et  $\epsilon_\lambda$  de (8) ne sont pas identiques. Quelque chose a été perdu en passant de  $Q_\ell$  à  $\epsilon_\lambda$  : l'indépendance en échelle de la mesure stochastique temp-échelle  $M$  n'est plus présente dans la définition de  $\tilde{M}$  où ne subsiste plus qu'une intégration en temps. Cependant, les propriétés multifractales essentielles sont conservées [11].

## 4 Cas $\alpha$ -stable en dimension $D$

Le raisonnement précédent s'étend selon les mêmes principes aux cascades  $\alpha$ -stables en général et en dimension  $D \geq 2$ ; le cas Gaussien correspond au choix  $\alpha = 2$ . Dans

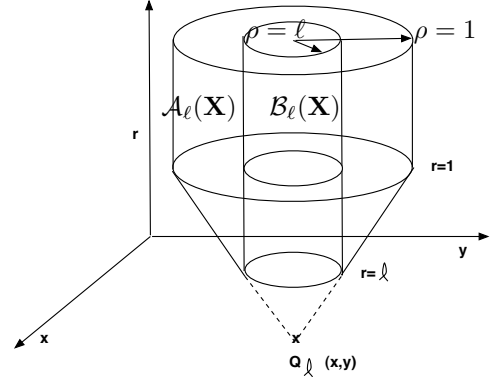


FIG. 3 – Cône  $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{X} = (x, y))$  pour  $D = 2$  decomposed in two parts  $\mathcal{A}_\ell(\mathbf{X})$  and  $\mathcal{B}_\ell(\mathbf{X})$ .

le cas 2D spatial, la quantité  $M(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{X}))$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ , est associée à la mesure de contrôle définie par une intégrale sur un volume conique défini de la façon suivante [3] :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\ell(\mathbf{X}) = & \{(\mathbf{X}', r') : \ell \leq \|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\| \leq 1, r' \geq \|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\|\} \\ & \cup \{(\mathbf{X}', r') : \|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\| \leq \ell, r' \geq \ell\}. \end{aligned} \quad (11)$$

comme sur la figure 3. Le cône ici est de dimension 3 : 2 dimensions pour le vecteur  $\mathbf{X} = (x, y)$  et 1 dimension pour l'échelle  $r$ . Un point important est ici de remarquer que la norme  $\|\cdot\|$  dans l'équation ci-dessus est la projection 2-dimensionnelle d'un point qui a une position  $(\mathbf{X}, r)$  dans l'espace 3D.

Ensuite nous calculons  $m(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{X}))$ .

$$\begin{aligned} m(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{X})) &= \iint_{\ell \leq \|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\| \leq 1} \left( \int_{\|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\|}^\infty \frac{C(2)dr}{r^3} \right) d\mathbf{X}' \\ &+ \iint_{\|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\| \leq \ell} \left( \int_\ell^\infty \frac{C(2)dr}{r^3} \right) d\mathbf{X}' \end{aligned} \quad (12)$$

où nous intégrons d'abord par rapport à  $r$  comme ci-dessus en dimension 1. L'intégration sur le volume conique peut être décomposée en une somme de tubes fins cylindriques. Nous utilisons alors des coordonnées cylindriques avec  $\rho = \|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\|$ . A partir d'arguments de similarité similaires à ceux qui sont utilisés ci-dessus en dimension 1, on obtient pour  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^D$  :

$$\begin{aligned} \tilde{M}_\ell(\mathbf{X}) &= \mu \cdot m(\mathcal{C}_\ell) \\ &+ \sigma \iint_{\|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\| \leq 1} K_\ell^{(D)}(\|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\|) dL_\alpha(\mathbf{X}'), \end{aligned} \quad (13)$$

où le nouveau noyau prend la forme suivante pour  $0 < \alpha \leq 2$  :

$$K_\ell^{(D)}(a) = \begin{cases} D^{-1/\alpha} \rho^{-D/\alpha}, & \text{for } \ell \leq \rho \leq 1, \\ D^{-1/\alpha} \ell^{-D/\alpha}, & \text{for } 0 \leq \rho \leq \ell. \end{cases} \quad (14)$$

## 5 Généralisation spatio-temporelle

Il a déjà été proposé dans [3] d'utiliser les cascades infiniment divisibles pour simuler des processus stochastiques multidimensionnels évoluant en temps. Dans le même esprit, nous pouvons considérer ici l'une des dimensions de  $\mathbf{X}$

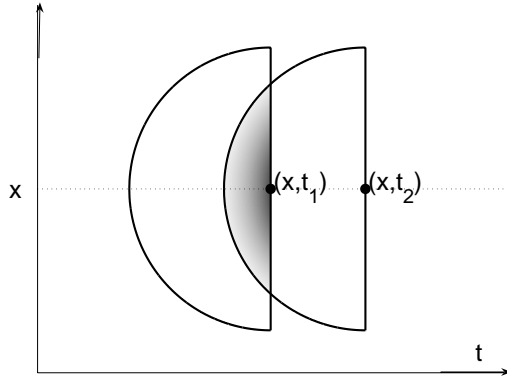


FIG. 4 – Domaine spatial d’intégration d’un bruit stable pour construire un processus 2D dans l’espace  $(x, t)$  vu comme un processus 1D évoluant en temps. Les corrélations sont contrôlées par la mesure de l’intersection des demi-disques centrés respectivement en  $(x, t_1)$  et  $(x, t_2)$ .

comme un temps :  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, t)$ . On obtient ainsi un processus (scalaire) multifractal de dimension  $(D-1)$  obéissant à une évolution temporelle elle-même multifractale. La causalité de la définition est garantie par le choix du domaine d’intégration, un demi-cône similaire au cône  $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{X})$  défini plus haut mais en ne conservant que la partie  $t' \leq t$ , voir fig. 4. Hormis la modification d’une constante de normalisation, le raisonnement précédent reste valable et on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\mathbf{x}, t) &= \mu \cdot m(\mathcal{C}_\ell) \\ &+ \sigma \iint_{\mathcal{F}} K_\ell^{(D)}(\|(\mathbf{x}', t') - (\mathbf{x}, t)\|) dL_\alpha(\mathbf{x}', t'), \end{aligned} \quad (15)$$

où  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, t)$  et  $\mathcal{F} = \{\mathbf{X}' = (\mathbf{x}', t') : \|(\mathbf{x}', t') - (\mathbf{x}, t)\| \leq 1; t' \leq t\}$ . Le noyau causal  $D$ -dimensionnel est toujours décrit par l’équation (14).

Une telle description met en évidence :

- la stationnarité du processus à position  $\mathbf{x}_o$  fixée ;
- la causalité de l’évolution temporelle ;
- une description par une intégrale stochastique relativement à un bruit stable  $dL_\alpha$  facile à calculer numériquement.

## 6 Conclusion

Nous avons ici rendu explicites différentes définitions rencontrées récemment dans le domaine des cascades continues en turbulence. D’un côté, nous avons abordé les cascades définies à partir de mesures aléatoires sur un volume espace-échelle, et de l’autre, montré que, moyennant certaines hypothèses simplificatrices, on pouvait en déduire une construction reposant sur une intégrale stochastique sur un domaine bien particulier de l’espace, avec un noyau d’intégration qui dépend de la dimension  $D$ . Cette approche est valide dans le cas Gaussien aussi bien que le cadre plus général des mesures  $\alpha$ -stables, et nous avons aussi exprimé le noyau intégrateur en fonction de cet indice  $\alpha$ .

Au-delà de l’intérêt théorique d’un tel résultat, ce passage d’une cascade  $\alpha$ -stable en échelle à l’exponentielle d’une intégrale stochastique purement spatiale s’avère utile en pratique pour la simulation numérique –voir figure 1(d)– de ces processus beaucoup plus simple à implémenter que la cascade multiplicative stable, cf. (1). Enfin, notons qu’il est alors possible de simuler une texture multifractale  $\alpha$ -stable animée dont l’évolution en temps est aussi multifractale mais surtout causale.

## Références

- [1] E. Bacry and J.F. Muzy. Log-infinitely divisible multifractal processes. *Comm. in Math. Phys.*, 236 :449–475, 2003.
- [2] J. Barral and B. Mandelbrot. Multiplicative products of cylindrical pulses. *Probab. Theory Relat. Fields*, 124 :409–430, 2002.
- [3] P. Chainais. Multidimensional infinitely divisible cascades. application to the modelling of intermittency in turbulence. *Eur. J. Phys. B*, 51 :229–243, 2006. DOI : 10.1140/epjb/e2006-00213-y.
- [4] P. Chainais. Infinitely divisible cascades to model the statistics of natural images. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2007. to appear.
- [5] P. Chainais, R. Riedi, and P. Abry. Scale invariant infinitely divisible cascades. In *Int. Symp. on Physics in Signal and Image Processing, Grenoble, France, January 2003*.
- [6] P. Chainais, R. Riedi, and P. Abry. On non scale invariant infinitely divisible cascades. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(3) :1063–1083, 2005.
- [7] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 2. John Wiley and Sons, Inc., New-York, London, Sidney, 1966.
- [8] J.F. Muzy and E. Bacry. Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log-infinitely divisible scaling laws. *Phys. Rev. E*, 66, 2002.
- [9] B.S. Rajput and J. Rosinski. Spectral representations of infinitely divisible processes. *Probability Theory and Related Fields*, 82 :451–487, 1989.
- [10] G. Samorodnitsky and M. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes*. Chapman and Hall, New York ISBN 0-412-05171-0, 1994.
- [11] F. Schmitt. A causal multifractal stochastic equation and its statistical properties. *Eur. Phys. J. B*, 34 :85–98, 2003.
- [12] F. Schmitt and P. Chainais. On causal stochastic equations for log-stable multiplicative cascades. *to appear in Eur. Phys. J. B*, 2007.
- [13] F. Schmitt and D. Marsan. Stochastic equations generating continuous multiplicative cascades. *Eur. Phys. J. B*, 20 :3–6, 2001.