

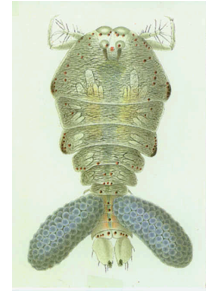
Des équations stochastiques pour la synthèse de cascades multifractales

François G. Schmitt

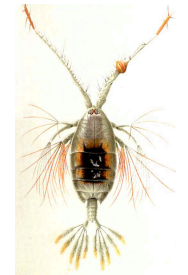
CNRS & Université de Lille 1
Station Marine de Wimereux

Francois.schmitt@univ-lille1.fr

Parcours personnel



- Turbulence multifractale depuis 1990: atmosphère, océan.
- Motivation actuelle (au sein d'une station marine): étude des couplages physique-biologie - turbulence et plancton.
- Plancton: organisme de l'ordre du mm. Nécessité de tenir compte des interactions et intermittences existant à micro-échelle.
- Grande gamme d'échelle dans l'océan (facilement 10^4).
- Applications: analyse de données, "expériences numériques" (marche aléatoire de copépodes ...), synthèse d'image, prédictabilité



Plan

- Survol historique: propriétés fondamentales des cascades multifractales
- Densification et processus stochastiques log-infiniment divisibles.
- Une équation stochastique causale et lognormale et ses propriétés.
- Quelques perspectives.

➤ F. G. Schmitt, *Intermittence et turbulences; analyse de données, validation de modèles et applications*, HDR, Université Paris 6 (2001).

➤ F. G. Schmitt et D. Marsan, Stochastic equations generating continuous multiplicative cascades, *Eur. Phys. J. B* **20**, 3-6 (2001).

➤ F. G. Schmitt, A causal multifractal stochastic equation and its statistical properties, *Eur. Phys. J. B* **34**, 85-98 (2003).

Turbulence développée

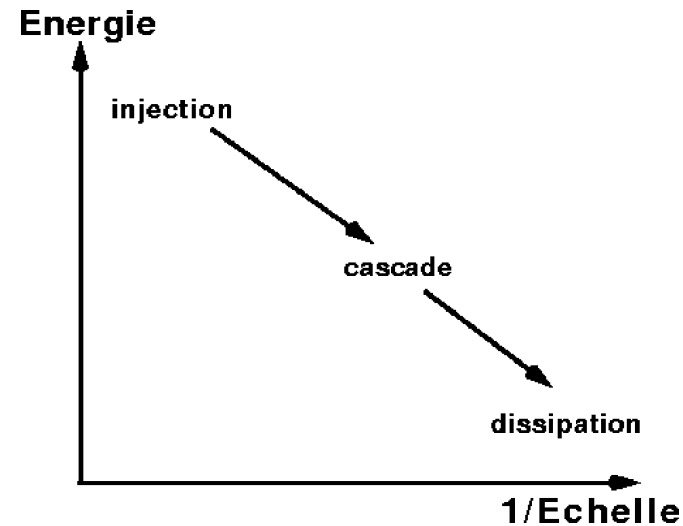
Caractérisée par :

- grand nombre de Reynolds
 - grande variabilité sur grande gamme d'échelle
 - système dissipatif
 - apparence chaotique
-
- Résolution mathématique de Navier-Stokes : pas encore possible
 - Simulation numérique directe (DNS) de Navier-Stokes: Re trop petit
 - Modèles de type fermeture : ne tiennent pas compte de l'intermittence
 - **Approche stochastique « phénoménologique » : cascades multiplicatives**

Cascade de Richardson (1922)

We realize that :

big whirls have little whirls
that feed on their velocity,
and little whirls have lesser whirls
and so on to viscosity



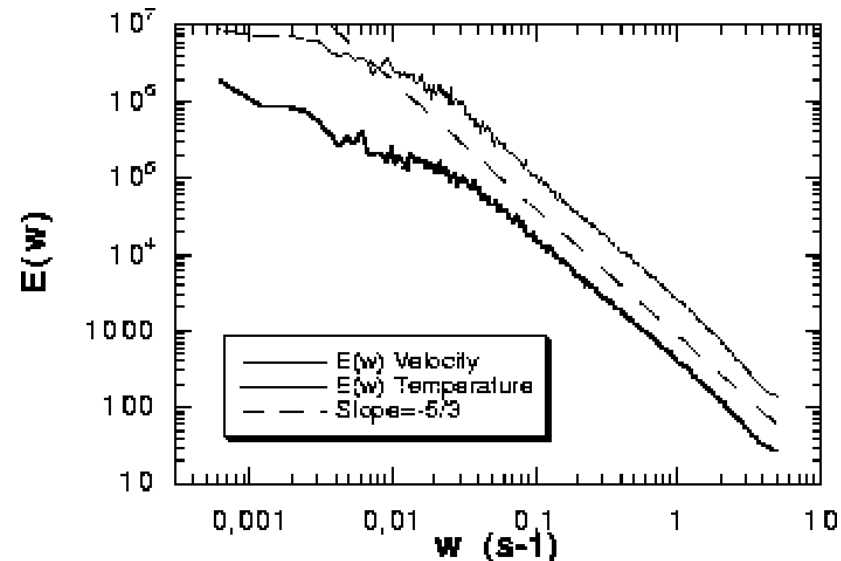
Kolmogorov 1941

- Echelles inertielles $\ell \ll 1 \ll L$ L : échelle externe
 ℓ : échelle dissipative
- Isotropie locale (homogène; statistiques isotropes)
- Statistiques ne dépendent que de $\ell, 1$

alors dimensionnellement : $\langle \ell V_\ell^2 \rangle = \langle |V(x+\ell) - V(x)|^2 \rangle = C \ell^{2/3} \ell^{2/3}$

ou spectralement :

$$E_V(k) \propto \ell^{2/3} k^{-5/3}$$



Intermittence

- Kolmogorov 1941 : ϵ est une quantité homogène, présentant une valeur bien définie à petite échelle
- Expérimentalement :
 - ϵ est « unevenly distributed »
 - Fluctuations « tend to intermittent variations »
(Batchelor et Townsend, 1949)

Nouveau modèle : Obukhov, 1962, Kolmogorov, 1962

- Obukhov :
$$\epsilon_\ell(x) = \frac{1}{\text{vol}(B_\ell)} \int_{B_\ell(x)} \epsilon(x') dx'$$
- Kolmogorov :
 - ϵV_1 s'exprime en fonction de ϵ et l

$$\langle \epsilon V_\ell^2 \rangle \propto \langle \epsilon_\ell^{2/3} \rangle \ell^{2/3}$$
 - ϵ est une variable aléatoire log-normale
 - Générateur $G = \log \epsilon$ $\epsilon_G^2 = A + \epsilon \log L/l$

Fonctions de structure et modèle log-normal

- Kolmogorov 1941b: $\langle \overline{V_\ell^3} \rangle = \frac{4}{5} \ell$
- Donc en notant $\langle \overline{V_\ell^q} \rangle = \ell^{\zeta(q)}$

$\zeta(q)$: exposant des fonctions de structure

$$(\zeta(0)=0 ; \zeta(3)=1)$$

- On a pour le modèle log-normal :

fonction quadratique

$$\zeta(q) = \frac{q}{3} \left[\frac{q}{18} q(q-3) \right]$$

Résultats expérimentaux : corrélations de la dissipation

Pseudo dissipation : $\epsilon = 15 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2$

$$E_\epsilon(k) \sim k^{-1+\alpha} \quad \text{Gurvich et Zubkovskii, 1963}$$

$$\langle \epsilon(x)\epsilon(x+r) \rangle \sim r^{-\alpha} \quad \text{Pond et Stewart, 1965}$$

expérimentalement : $0.2 \leq \alpha \leq 0.5$

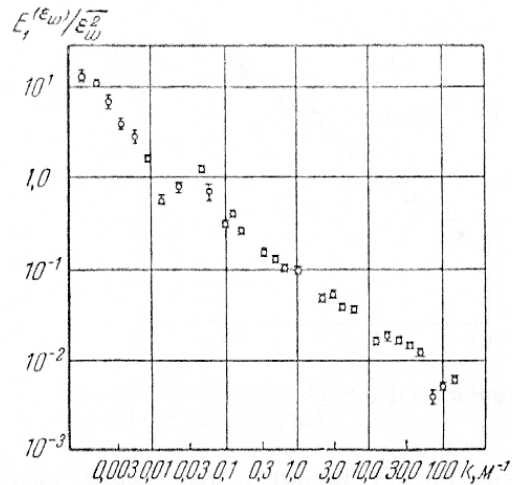


Fig. 102 The spectrum $E_1^{(\epsilon_w)}(k)$, according to Gurvich and Zubkovskii (1963).

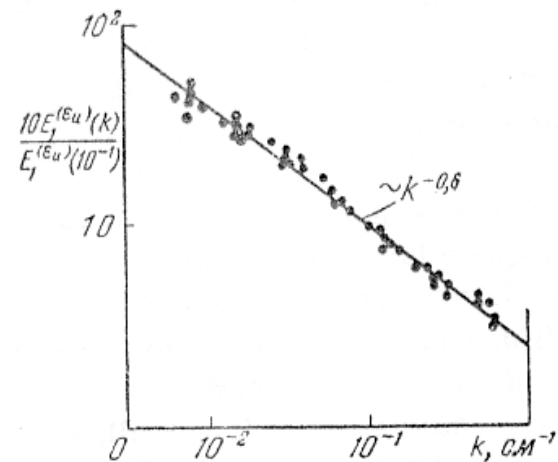
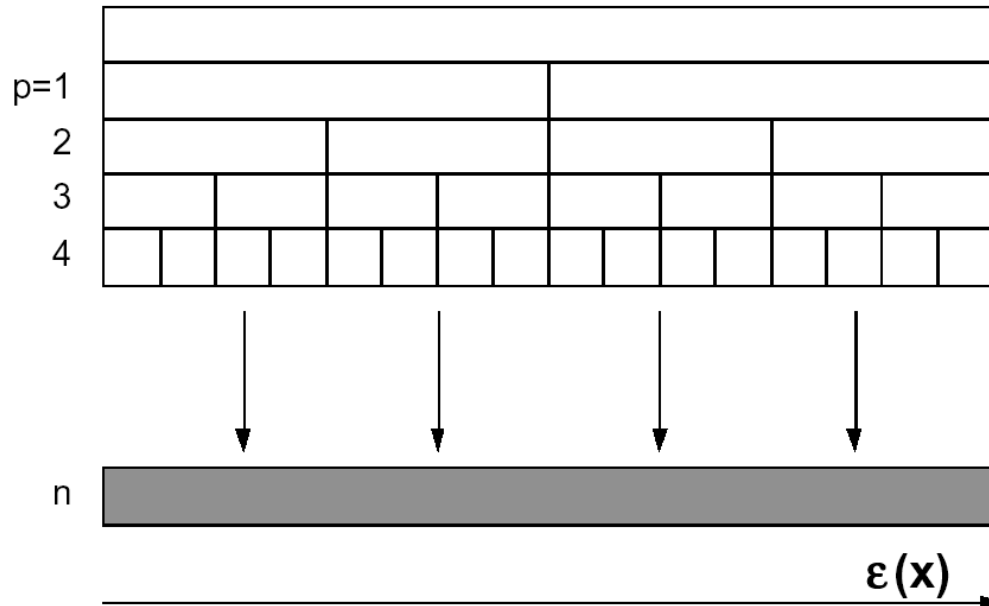


Fig. 103 The spectrum $E_1^{(\epsilon_u)}(k)$, according to Pond and Stewart (1965).

D'où la cascade de Yaglom (1966)



$$\overline{\varepsilon}(x) = \prod_{i=1}^n W_{i,x}$$

Motivations de Yaglom (étudiant de Kolmogorov):

- Statistiques log-normales (K62)
- Corrélations spatiales à longue portée
 - Génère de l'intermittence
 (fortes fluctuations structurées spatialement)

Propriétés du modèle de cascade de Yaglom (avec relaxation de l'hypothèse LN)

- Moments invariants d'échelle :

$$\langle W^q \rangle = \left(\frac{L}{\ell} \right)^{K(q)} \quad \frac{L}{\ell} = 2^n$$

$$K(q) = \log_2 \langle W^q \rangle$$

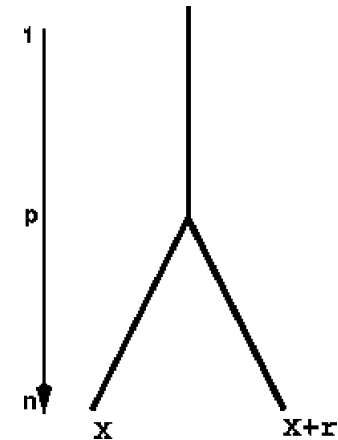
convexe, non-linéaire (seconde fonction caractéristique -- ou encore fonction génératrice des cumulants)

Conservation $K(1) = 0$ $\langle W \rangle = \text{cte}$

- Corrélations du processus: $\langle \varphi(x)\varphi(x+r) \rangle \sim r^{-\alpha(2)}$
Yaglom, 1966

De façon plus générale (Cates et Deutsch, 1987):

$$\langle \varphi_{\square}^p(x) \varphi_{\square}^q(x+r) \rangle \sim \varphi_{\square}^{K(p+q)} r^{K(p)+K(q)-K(p+q)}$$



comme $K(q)$ non-linéaire, $K(p)+K(q) \neq K(p+q)$
d'où corrélations généralisées à longue portée

- Corrélations du générateur (log du processus):

$$\langle \varphi(x)\varphi(x+r) \rangle \sim C \square k \log r$$

Cadre général d'Obukhov-Kolmogorov 1962, Yaglom 1966

$$\langle v_\ell^q \rangle \sim \left(\frac{L}{\ell} \right)^{K(q)}$$

$$\langle v_\ell^q \rangle \sim \langle v_\ell^{q/3} \rangle \ell^{q/3} \sim \ell^{K(q)}$$

$$K(q) = \frac{q}{3} \sim K\left[\frac{q}{3}\right]$$

Modèle «Noir et blanc»

Novikov et Stewart, 1965

Mandelbrot, 1974

Frisch et al., 1978

- 2 valeurs possibles pour W :

$$Pr(W = 0) = 1 - \square$$

$$Pr(W = 1/\square) = \square$$

donne : $K(q) = (q-1)c$

$$c = -\log_2 \square$$

Validation expérimentale, années 1960-70

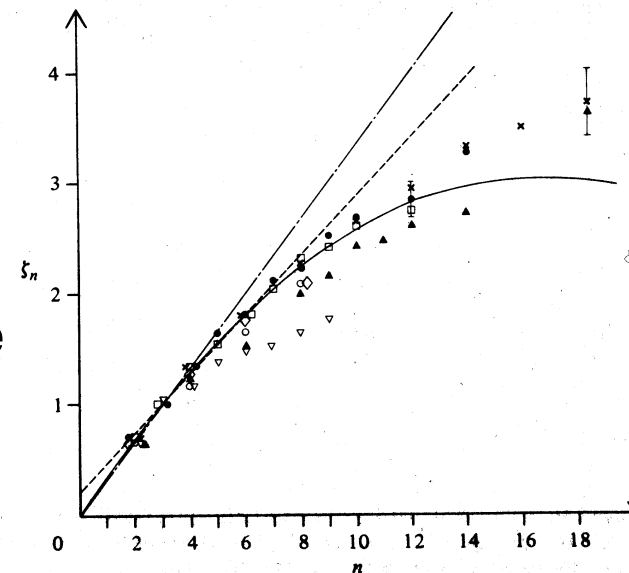
$\zeta(q)$ fourni par l'analyse de données

$$\zeta(q) = \frac{q}{3} \quad \text{Kolmogorov 1941 homogène}$$

$$\zeta(q) = c + \frac{q}{3}(1 - c) \quad \text{H-model}$$

$$\zeta(q) = \frac{q}{3} + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{18} \quad \text{log-normal}$$

Anselmet et al., 1984 : valeurs expérimentales «entre» H-modèle et modèle log-normal



Multifractals et cascades multiplicatives

1983-1985 : apparition simultanée en turbulence et pour les attracteurs étranges (systèmes chaotiques)

\square -modèle : modèle fractal

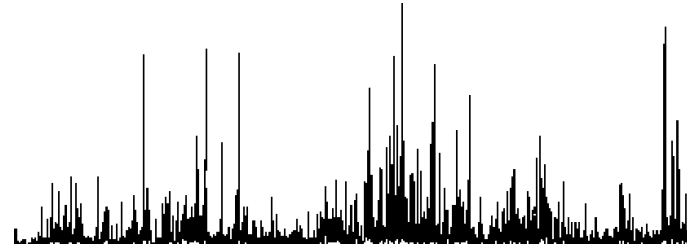
Autres cascades : infinité de dimensions fractales : multifractal

$$\square(q) = q/3 - \log_2 \langle W^{q/3} \rangle$$

différents choix possibles pour W

Singularité et moments

$$f(x) = \prod_{i=1}^n W_{i,x}$$



- Grandes déviations et singularités :

$$\Pr(g = \frac{L}{\ell}) \sim \left(\frac{L}{\ell}\right)^{-c(\frac{L}{\ell})} \quad \langle \left(\frac{L}{\ell}\right)^q \rangle \sim \left(\frac{L}{\ell}\right)^{K(q)}$$

$c(\ell)$ fonction codimension

$K(q)$ fonction (génératrice) des moments

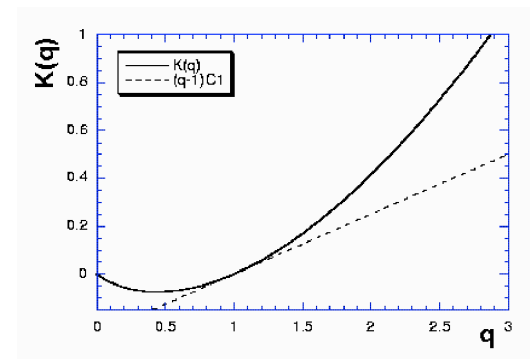
- Transformation de Legendre (*Parisi et Frisch, 1985*)

$$\begin{aligned} K(q) &= q c(\ell) \\ q &= c'(\ell) \end{aligned} \quad \begin{aligned} c(\ell) &= q \ell \\ \ell &= K'(q) \end{aligned}$$

Propriétés générales de $K(q)$ et $c(\square)$

- $K(q)$ convexe, non-linéaire : différentes singularités, d'où le terme multifractal

$$\square = K'(q)$$

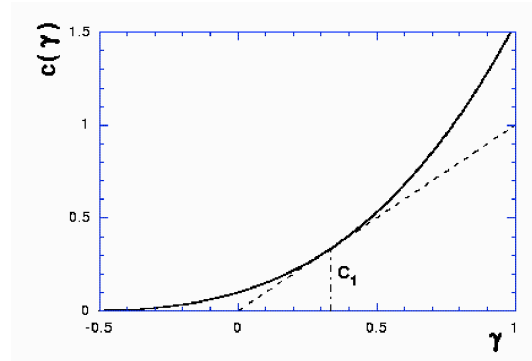


- $c(\square)$ positive, croissante, convexe.

Conservation : $K(1)=0$

$$\square_1 = C_1 = K(\square_1)$$

$c(C_1) = C_1$ singularité moyenne



Cascades discrètes

Plusieurs modèles construits sur la base du modèle de cascade de Yaglom (hypothèse de lognormalité superflue):

- \square modèle (*Schertzer et Lovejoy, 1984*)
- \square modèle aléatoire (*Benzi et al., 1984*)
- p modèle (*Meneveau et Sreenivasan, 1987*)

- version discrète de modèles continus (log-normal, log-stable, log-Poisson, etc.)
- infinité de variété possible

Cascades continues

- Rapport d'échelle total $\square = L/l$;
 $\square = 2^n$ devient $\square = \square_1^n$; \square fixé, $n \square$ donne $\square_1 \square 1$

$$\square_l = \prod_{i=1}^n W_{i,x} = e^{\sum_{i=1}^n g_i} = e^{g \log \square}$$

$$g = \sum_{i=1}^n \log_{\square} W_i$$

\square g variable aléatoire infiniment divisible

- Modèles de cascade log-infiniment divisibles

Exemples de modèles log-infinitement divisibles (LID)

- Log-normal (*Kolmogorov, 1962; Yaglom, 1966*)
- log-Gamma (*Saito, 1992*)
- log-Lévy (*Schertzer et Lovejoy, 1987; Kida, 1991*)
terme non-linéaire : algébrique en q^{\square}
- log-Poisson (*She et Levêque, 1994; Dubrulle, 1994; She et Waymire, 1995*)
terme non-linéaire : exponentiel en \square^q

Comment construire la densification

- Quelles propriétés dynamiques pour un processus multifractal?
- Recherche de la construction d'un processus stochastique multifractal log-ID
- Nécessité d'un nouveau formalisme pour la densification (auparavant, plutôt de type « \square règle de construction \square », assez descriptif...)

Mesure aléatoire ID

➤ Mesure aléatoire ID: pour un ensemble A , $M(A)$ est une variable aléatoire ID, de loi caractérisée par la seconde fonction caractéristique de référence $\square_0(q)$

$$\log \langle e^{qM(A)} \rangle = m(A) \square_0(q)$$

➤ $m(A)$ mesure de contrôle (déterministe) de A

➤ on introduit une *échelle* pour la mesure $M(A)$:

$$S(M(A)) = m(A)$$

$$C = A \square B; \quad A \square B = \emptyset$$

$$S(M(C)) = m(C) = m(A) + m(B)$$

$$= S(M(A)) + S(M(B)) \quad 24$$

Intégrale stochastique ID

- Construction d'une intégrale stochastique ID

$$\int_a^b f(x)M(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) M\left[a + i \frac{b-a}{n}, a + (i+1) \frac{b-a}{n}\right]$$

- Pour $I = \int_a^b M(dx)$ I est une loi ID de la même famille que M, et

$$S(I) = S\left(\int_a^b M(dx)\right) = \int_a^b dx = m(A) \quad \log \langle e^{q \int_a^b M(dx)} \rangle = m(A) \varphi_0(q)$$

- Par contre pour $I = \int_a^b f(x)M(dx)$ on n'a plus forcément la même loi ID:

$$\log \langle e^{q \int_a^b f(x)M(dx)} \rangle = \int_a^b \varphi_0(qf(x))dx \quad (\text{qui ne se simplifie que dans le cas stable})$$

Processus stochastique log-ID

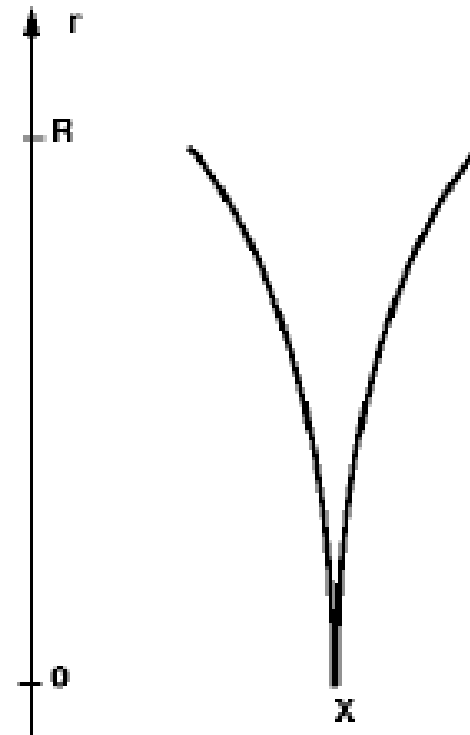
- La densification donne une intégrale stochastique log-ID:

$$I_{\square}(x) = \square^c \exp \int_1^{\square} M\left(\frac{cd\square}{\square}, D_{\square}I_0(x)\right)$$

$\square \gg 1$ Rapport d'échelle (fixe)

D_{\square} Dilatation; c constante

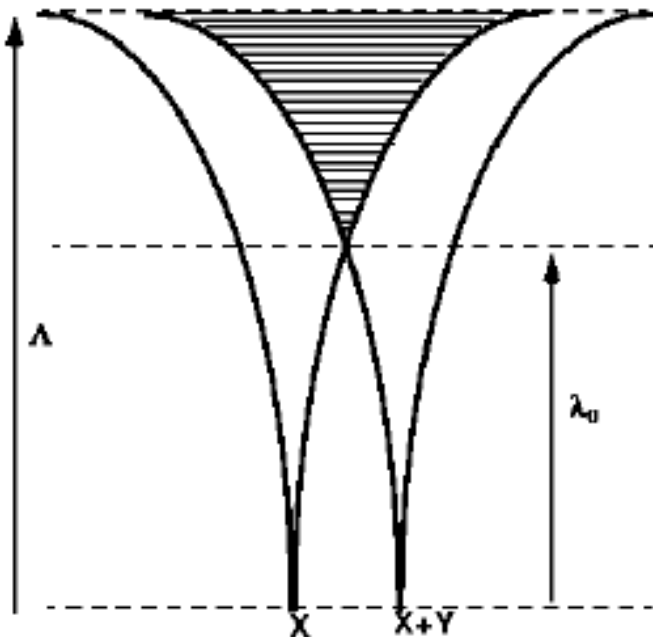
Intégration
sur un cône



Propriétés multifractales du processus stochastique log-ID

➤ Moments invariants d'échelle:

$$\begin{aligned} \langle I_\lambda(x)^q \rangle &= \lambda^{qc} \langle \exp q \int_1^\lambda M\left(\frac{cd\lambda}{\lambda}, D_\lambda I_0(x)\right) \rangle \\ &= \lambda^{qc} \exp \int_0^1 m\left(\frac{cd\lambda}{\lambda}\right) = \lambda^{c(\int_0^1 m(q))} \end{aligned}$$



➤ Propriétés de corrélation en loi de puissance: intersection de deux cones

Simplification: passage au cas log-normal

➤ Simplification pour les mesures et intégrales stochastiques

$$\sigma_0(q) = q^2$$

➤ Cadre générique à partir duquel d'autres modèles ou le cas général log-ID pourra être exploré

L'équation

$$\sigma_\Delta(t) = \sigma^{\Delta/2} \exp\left[\frac{\Delta^{1/2}}{\Delta} \int_{t+1-\Delta}^t (t+1-u)^{\Delta/2} dB(u)\right]$$

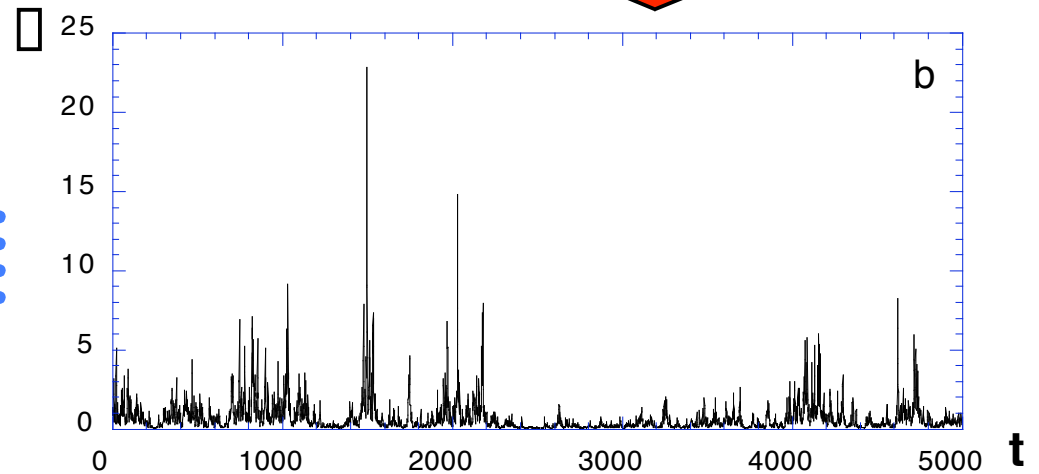
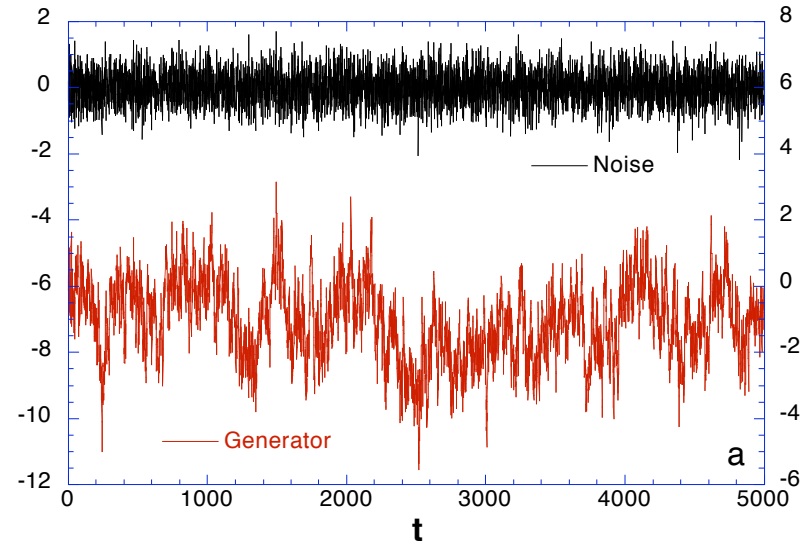
- t: temps
- $\Delta \gg 1$: rapport d'échelle total
- $0 < \Delta < 1$: paramètre d'intermittence
- B(u): processus Brownien

Principe

Intégration fractionnaire d'un bruit blanc...

Rappel: fBm (H): kernel en $(t-u)^{H-1/2}$
Donc ici kernel en $(t-u)^{-1/2}$
correspond à **H=0**

... puis exponentiation...



Propriétés de l'équation: (1) moments

- Processus stationnaire
- Moments indépendants du temps:

$$\begin{aligned}
 \langle X(t)^q \rangle &= \exp\left[\frac{q^2}{2} t\right] \langle \exp\left[\frac{q^2}{2} \int_{t+1}^t (t+1-u)^{1/2} dB(u)\right] \rangle \\
 &= \exp\left[\frac{q^2}{2} t\right] \exp\left[\frac{q^2}{2} \int_{t+1}^t \frac{du}{t+1-u}\right] \\
 &= \exp\left[\frac{q^2}{2} t\right] \exp\left[\frac{q^2}{2} t\right]
 \end{aligned}$$

$$\langle X^q \rangle = \exp\left[\frac{q^2}{2} t\right]$$

$$K(q) = \frac{q^2}{2} t$$

Propriétés de l'équation: (2) corrélations du processus

- Corrélations généralisées $C_{\square\square}(p, q, \square) = \langle \square_{\square}(t)^p \square_{\square}(t + \square)^q \rangle$
- Expression exacte (après qqes lignes de calcul):

$$C_{\square\square}(p, q, \square) = \square^{K(p)+K(q)} \frac{\square \sqrt{\square \square \square} + \sqrt{\square} \square^{2(K(p+q)-K(p)-K(q))}}{1 + \sqrt{\square+1}}$$

pour $1 \ll \square \ll \square$ donne:

$$C_{\square\square}(p, q, \square) \square \square^{K(p+q)} \square^{K(p)+K(q)-K(p+q)}$$

Propriétés de l'équation: (3) corrélations du générateur

$$X_{\Delta}(t) = \log X_{\Delta}(t) = \frac{\Delta}{2} \log \Delta + \Delta^{1/2} \int_{t+1-\Delta}^t (t+1-\Delta-u)^{\Delta/2} dB(u)$$

$$C_{X_{\Delta}}(\Delta) = \langle X_{\Delta}(t) X_{\Delta}(t+\Delta) \rangle$$

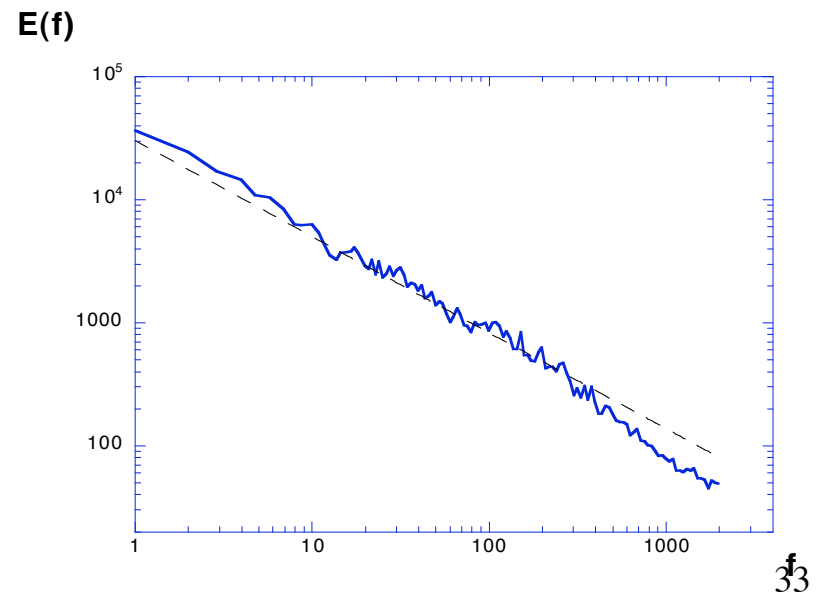
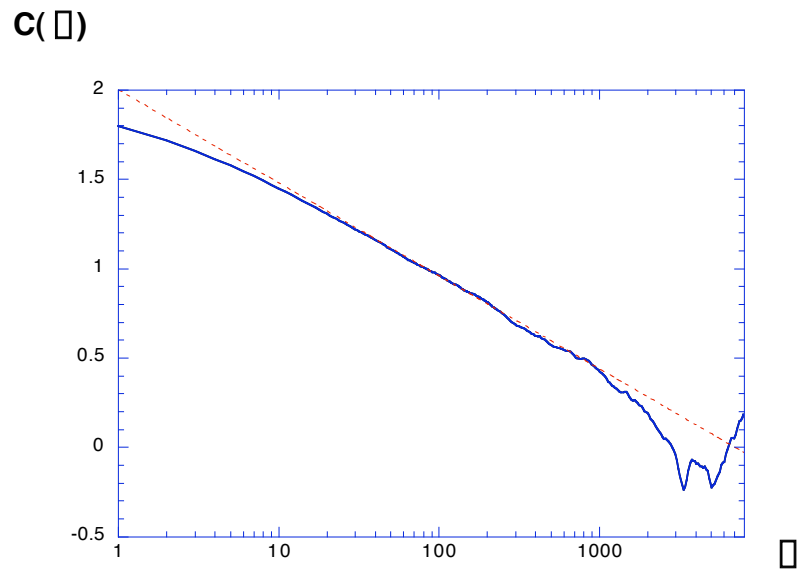
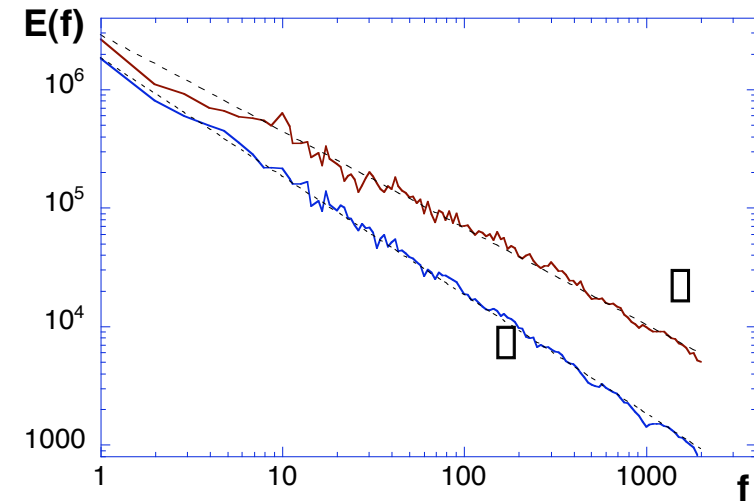
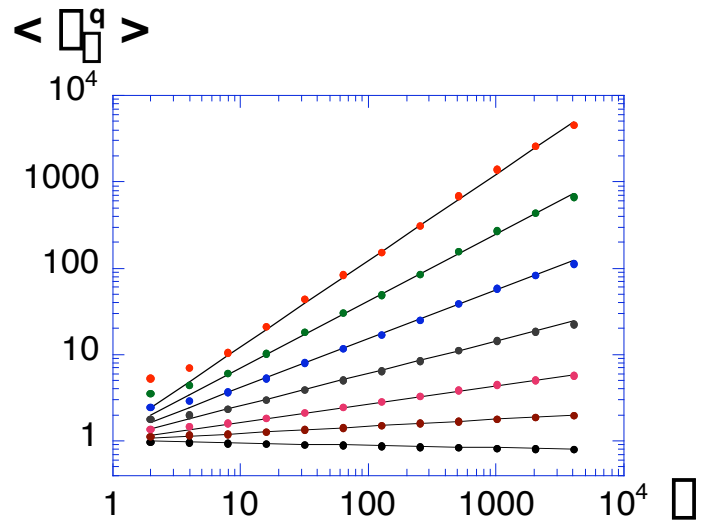
➤ Expression exacte (après qqes lignes de calcul):

$$C_{X_{\Delta}}(\Delta) = \left(\frac{\Delta}{2} \log \Delta\right)^2 + 2\Delta \log \frac{\sqrt{t\Delta} + \sqrt{\Delta}}{1 + \sqrt{\Delta+1}}$$

pour $1 \ll \Delta \ll \Delta$ donne:

$$C_{X_{\Delta}}(\Delta) = A_{\Delta} \Delta \log \Delta$$

Simulation numérique



Autres propriétés de l'équation: (1) expression différentielle

➤ en négligeant un terme en $\sqrt{\Delta t}^{1/2}$

$$d\sigma_{\sigma}(t) = \sigma^{1/2} \sigma_{\sigma}(t) dB(t) + \frac{1}{2} (1 - W(t)) dt$$

$$W(t) = \sigma^{1/2} \int_{t+1}^t (t+1 - u)^{3/2} dB(u)$$

Autres propriétés de l'équation: (2) propriété de composition de semigroupe

➤ Egalité en distribution (relation exacte): $E_t(\square) = \square_{\square}(t)$

$$E_t(\square_1 \square_2) \stackrel{d}{=} E_t(\square_1) E_{t/\square_1}(\square_2)$$

➤ Convolution pour les probabilités $\square_{\square}(x) = \Pr(\log E_t(e^{\square}) = x)$

$$\square_{\square_1 + \square_2} = \square_{\square_1} \square_{\square_2}$$

➤ Chapman-Kolmogorov donne la relation de composition proposée par Castaing

Autres propriétés de l'équation: (3) expression différentielle en échelle et équation de Langevin

$$\square = \log \square \quad \square_t(\square) = \log \square_t(t) \quad \square_0 = \square_t \langle \square_t \rangle$$

➤ différentielle en échelle

$$d\square_0(\square) = \sqrt{\square} e^{\square} dB_0(e^{\square})$$

➤ A comparer avec les expressions empiriques (Peinke, Cleve&Greiner, Marcq&Naert...)

$$d\square(\square) = D_1(\square)d\square + \sqrt{2D_2(\square)}dB(\square)$$

- Certains résultats expérimentaux sont proches, mais:
- différence bare/dressed
- expression uniquement pour cas log-normal
- $e^{\square} \leftrightarrow \square$

Autres développements: produit continu stochastique

- Densification naturelle du produit discret: produit continu
- Cadre: produit continu stochastique ou encore martingales continues (McKean, Ibero, Doleans-Dade...)

$$\prod_a^b N(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{n-1} N\left(\left[a + i \frac{b-a}{n}, a + (i+1) \frac{b-a}{n} \right]\right)$$

$$N(A) = e^{M(A)} \quad \text{Fonction d'ensemble multiplicative aléatoire}$$

- possibilité d'introduire des zéros
- passage possible au multi-dimensionnel (tensoriel)

$$\underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{\sigma}}}(t) = \underline{\underline{\sigma}}^{\underline{\underline{\sigma}}/2} \prod_{t+1 \leq u \leq t} \exp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{1/2} (t+1 \leq u) \underline{\underline{\sigma}}^{1/2} d\underline{\underline{B}}(u)\right)$$

Développements et applications

(souhaitables mais non encore entreprises...)

- Cas multidimensionnel: turbulence vectorielle; couplages vitesse-scalaire.
- Equations stochastiques pour champs multiaffine (ex: champ de vent, finance, etc.).
- Exploiter concrètement sur les données les propriétés de prédictabilité de ces équations.