

Intégrale et équations différentielles pour le mouvement brownien fractionnaire

L. Coutin

Laboratoire de Statistique et Probabilités

Université Paul Sabatier

<http://www-sv.cict.fr/lsp/coutin>

Plan

1. I Mouvement brownien fractionnaire
 - (a) Definition et propriétés
 - (b) Représentations
2. II Intégration
 - (a) Motivation
 - (b) Outils
 - (c) Intégrale déterministe
 - (d) Intégrale gaussienne
 - (e) Intégrale par régularisation
3. III Equation différentielle
 - (a) Cas régulier
 - (b) Application d'Itô
 - (c) Fonctionnelles régulières
 - (d) Cas des trajectoires rugueuses
 - (e) Cas du mouvement brownien fractionnaire
4. Conclusion

I.1 Mouvement brownien fractionnaire

Définition Pour $H \in]0, 1[$,
 $(W_t^H, t \in [0, +\infty[)$ processus gaussien centré
de noyau de covariance :

$$E_H[W_s^H W_t^H] = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

Propriétés:

W^H trajectoires presque sûrement höldériennes
d'ordre α , $\alpha < H$:

Pour $0 < \alpha < H$, $T > 0$ il existe une va $C_{\alpha,T}$
ayant un moment exponentiel

$$\forall 0 < s < t < T,$$

$$|W_t^H - W_s^H| \leq C_{\alpha,T} |t - s|^\alpha.$$

I.2 Représentations du MBF

a) Mandelbrot-Van Ness, 1969

$$W_H(t) = \int_{-\infty}^t \{(t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-s)_+^{H-\frac{1}{2}}\} dB_s$$

où $(B(t), t \in \mathbf{R})$ est un mouvement brownien,

b) Decreasefond-Ustünel, 1998

$$W_K(t) = \int_0^t K_H(t, s) dB_s = \mathcal{I}^H(B)(t),$$

où $(B(t), t \geq 0)$ est un mouvement brownien,

$$K_H(t, s) = \frac{(t-s)^{H-1/2}}{\Gamma(H+1/2)} F\left(\begin{matrix} 1/2-H, H-1/2, \\ H+1/2, 1-\frac{t}{s} \end{matrix} \right)$$

et $\mathcal{I}^H$ est un opérateur linéaire, déterministe.

I.3 Motivations

Construction d'une intégrale qui permette:

1. compatible avec les sommes de Riemann;
2. une formule de changement de variable

$$F(W_t^H) = F(0) + \int_0^t F'(W_s^H) dW_s^H;$$

3. de définir et de résoudre
des équations différentielles
dirigées par un mouvement brownien fractionnaire;
4. compatible avec les probabilités
(permettant des calculs de moments,
conditionnels ou non).

II.1 Différents outils

1. Les propriétés trajectorielles
qui conduisent à une généralisation de l'intégrale de Riemann;

$$\sum_i a(t_i) (W^H(t_i) - W^H(t_{i+1})) \rightarrow \int_0^T a(s) dW_s^H$$

2. le caractère gaussien qui conduit
à des généralisation de l'intégrale de Wiener;
3. la représentation intégrale qui conduit
à limites d'intégrales de régularisations du MBF

II.2 Bibliographie

a) Approches déterministes

Young, 1936,
Föllmer, 1981,
Russo-Vallois, 1993,
Ciezielski, Kerkyacharian and Roynette, 1993,
Lyons, 1998,
Feyel and de la Pradelle, 1998,
Dudley and Norvaisa, 1998,
Zähle, 1998,

b) Techniques gaussiennes

Decreusefond and Ustunel, 1997,
Norros, Valkeila and Virtamo, 1998,
Duncan, Hu and Pasik-Duncan, 1998,

c) Limites d'intégrales de semimartingales

Carmona, Coutin and Montseny, 2003,
Alos, Nualart and Mazet, 1999.

II.3a Intégrales déterministes

Définition $(x_t)_{t \in [0,1]}$ est à p variation finie équivaut à

$$\sup_D \sum_{t_i \in D} |x_{t_{i+1}} - x_{t_i}|^p < +\infty.$$

Proposition Young, 1936

Si a est à q variation finie avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$

$$\sum_{t_i \in D} a(t_i)(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \rightarrow \int_0^1 a(s) dx_s.$$

Propriétés

- Formule de changement de variables,
- Equations différentielles

Inconvénients

- Ne s'applique qu'au cas $H > \frac{1}{2}$.
- pas de propriétés probabilistes, (en général intégrale non centrée).

II.4a Intégrale gaussienne

a) Cas d'un intégrand déterministe

Pour a constant par morceaux

$$a(t) = \sum_i a_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t)$$

$$\int_0^1 a(s) dW^H(s) = \int_0^t I^H(a)(s) dB_s$$

où

$$I^H(a)(s) = \int_s^1 a(u) \partial_1 K^H(u, s) du.$$

Définition Pour tout a limite de a constants par morceaux, pour la norme

$$\|a\|_H = \int_0^t I^H(a)(s)^2 ds$$

$$\int_0^1 a(s) dW_H(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 a_n(s) dW^H(s).$$

Propriété $\int_0^1 a(s) dW_H(s)$ variable gaussienne centrée de variance $\|a\|_H^2$.

II.4.b Intégrale gaussienne

a) Cas d'un intégrand aléatoire

(Decreusefond-Ustunel 98)

Définition Pour a quelconque, on peut donner un sens à

$$\int_0^1 I^H(a)(s) \delta B_s.$$

Propriétés

- $\int_0^1 a(s) \delta W_H(s)$ variable centrée, dont on peut calculer la variance.
- formule de changement de variable.

Inconvénient

- diffère en général de l'intégrale déterministe;
- pas de contrôle de la forme

$$\mathbf{E}\left(\left[\int_0^1 a(s) dW_H(s)\right]^2\right) \leq C \mathbf{E}\left(\left[\int_0^1 I^H(a)(s)^2 ds\right]^2\right),$$

- pas de résolution d'équations différentielles.

II.5a Intégrale obtenue par régularisation

Alos-Mazet-Nualart

Carmona-Coutin-Montseny

Interpolation linéaire

$$W^{H,n}(t) = W^H(t_i^n) + 2^n(t - t_i^n) (W^H(t_{i+1}^n) - W^H(t_i^n))$$

où $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ avec $t_i^n = \frac{i}{2^n}$

Proposition

$W^{H,n}$ est dérivable de dérivée

$$\frac{dW^{H,n}}{dt}(t) = \int_0^t \partial_1 K^{H,n}(t, s) dB_s$$

avec $\partial_1 K^{H,n}(t, s)$ interpolée linéaire de $t \mapsto K^H(t, s)$ le long de $(t_i^n = \frac{i}{2^n})$.

Définition

Pour a quelconque

$$\int_0^t a(s) dW_s^H = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t a(s) dW_s^{H,n}$$

quand cela a un sens.

II.5b Intégrale obtenue par régularisation

propriétés

- coïncide avec les sommes de Riemann quand les deux existent,
- $\int_0^t a(s) dW_s^H = \int_0^t a(s) \delta W_s^H + \text{“trace”},$
- formule de changement de variable,
- calcul de moments,

Inconvénients

- pas de contrôle de la forme

$$\mathbf{E}\left(\left[\int_0^1 a(s) dW_H(s)\right]^2\right) \leq C \mathbf{E}\left(\left[\int_0^1 I^H(a)(s)^2 ds\right]^2\right),$$

- pas de résolution d'équations différentielles.

III.1 Equations différentielles

Proposition

Soit $(x_t)_{t \in [0,1]}$ est à p variation finie, à valeurs dans $\mathbf{R}^d$,
 $f \in C^{[p]+1}$

$$\sum_{t_i \in D} \sum_{k=1}^{[p]} D^k f(x_{t_i}) \frac{1}{k!} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^{\otimes k}$$

converge lorsque $|D| \rightarrow 0$ vers $f(x_t) - f(x_0)$.

Expression invariante si

$$\frac{1}{k!} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^{\otimes k}$$

remplacé par

$$\frac{1}{k!} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^{\otimes k} + \text{terme antisymétrique.}$$

III.2 Application d'Itô

$\mathcal{S}^1$ ensemble des $(x_s)_{s \in [0,1]}$ à variations finies, continues dans $\mathbf{R}^d$.

f est une application lipschitzienne de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{d \times n}$.

L'application d'Itô associée à l'équation différentielle
(1) $dy_t = f(y_t)dx_t$, $y(0) = 0$ est

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^1 & \longrightarrow & \mathcal{S}^1 \\ x & \longmapsto & y \end{array}$$

où y est solution de (1).

L'application d'Itô n'est pas continue pour la norme uniforme.

III.3 Fonctionnelles régulières

Pour $x \in \mathcal{S}^1$

la **fonctionnelle régulière** au dessus de x est

$$X = (1, X^1, \dots, X^{[p]})$$

pour $0 \leq s < t \leq 1$

$$X_{s,t}^1 = x_t - x_s,$$

$$X_{s,t}^k = \int_{s < t_1 < \dots < t_k < t} dx_{t_1} \otimes \dots \otimes dx_{t_k},$$

$$X_{s,t}^k = \frac{(x_t - x_s)^{\otimes k}}{k!} + \text{terme antisymétrique}$$

$\Omega^{[p]}$ ensemble des fonctionnelles régulières.

Distance en p variation sur $\Omega^{[p]}$

$$\begin{aligned} d_p(X, Y) = & \sum_{i=1}^{[p]} (\sup_D \sum_l |X_{t_{l-1}, t_l}^i - Y_{t_{l-1}, t_l}^i|_{\mathbf{R}^{d[p]}}^{p/i})^{i/p} \\ & + \sup_{u \in [0,1]} |x_u - y_u|_{\mathbf{R}^d}. \end{aligned}$$

supremum $\sup_D$ sur toutes les partitions finies de $[0, 1]$.

Fonctionnelles géométriques

Les éléments de l'adhérence de l'ensemble des fonctionnelles régulières pour la distance en p variation sont des fonctionnelles **géométriques** :

Théorème de Wong-Zakai Lyons 98

Soit f de classe C^{p+1} ,

l'application d'Itô étendue associée à f :

$$(1, X^1, X^2, \dots, X^{[p]}) \mapsto (1, Y^1, Y^2, \dots, Y^{[p]})$$

$((1, Y^1, Y^2, \dots, Y^{[p]})$ fonctionnelle au dessus de y ,
 $[p]$ égale à la partie entière de p)
est continue pour la distance en p variation.

III.5 Fonctionnelle géométrique au dessus du MBF

En collaboration avec Qian

Soit la suite de fonctionnelles régulières

$$W(m)_{s,t} = (1, W(m)_{s,t}^1, W(m)_{s,t}^2, W(m)_{s,t}^3)$$

construite au dessus des approximations m -dyadiques de W^H , mouvement brownien fractionnaire de dimension d .

- Pour $H \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$, pour tout $3 < p < 4$ tel que $pH > 1$, $(W(m))_{m \in \mathbf{N}}$ converge au sens de la p variation vers une fonctionnelle géométrique $\mathbf{W} = (1, W^1, W^2, W^3)$

avec $W_{s,t}^1 = W_t - W_s$.

- Si $H \leq \frac{1}{4}$, $W(m)^2$ ne converge pas dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

IV Conclusion

- Aucune intégrale ne répond à tous nos vœux;
- dans de nombreux problèmes,
il faut mélanger les différentes notions.
- possibilité d'approximation et de simulation
des intégrales et des solutions d'équations
différentielles.