

## Algorithmes de suivi de cibles, processus déterminantaux et mouvement brownien de Dyson

Sujet proposé par Rémi Bardenet (CNRS, Laboratoire CRISTAL)  
et Mylène Maïda (Université Lille 1, Laboratoire Painlevé)

Note : ce sujet est particulièrement adapté à un couplage stage d'IMPACT/Mémoire de M2.

Les algorithmes de suivi de cibles [1, 2] estiment les trajectoires d'objets mobiles à partir d'observations. Si les cibles sont des avions volant dans un espace confiné, par exemple, les pilotes vont chercher naturellement à s'éviter les uns les autres et on aura besoin de modèles qui prennent bien en compte cette répulsion entre les cibles.

Si on s'intéresse à l'aspect statique du problème, on observe à temps fixé des particules aléatoires qui ont tendance à se repousser. On peut penser à des processus ponctuels déterminantaux (DPP), dont on commence à comprendre qu'ils permettent de modéliser efficacement la répulsion. En revanche, on dispose de peu de modèles dynamiques qui préservent cette répulsion, et qu'il est facile de simuler exactement.

Nous étudierons le mouvement brownien de Dyson, qui permet de simuler des mouvement browniens en 1D avec une répulsion de forme simple. Introduit dans les années 60 par le physicien Freeman Dyson, il peut être notamment interprété comme le processus des valeurs propres d'une matrice hermitienne dont les entrées sont des mouvements browniens indépendants, ou encore comme la limite d'un paquet de marches aléatoires conditionnées à ne pas se toucher. Il a été très étudié par les mathématiciens comme par les physiciens. On s'intéressera plus particulièrement à un schéma numérique pour la simulation de ces processus [3], qui pourra être implémenté par l'étudiant, par exemple en Python.

Quand on laisse évoluer longtemps des trajectoires du mouvement brownien de Dyson, on observe des distributions bien connues en matrices aléatoires appelées ensembles invariants unitaires, qui sont des exemples importants de particules en répulsion. Le mouvement brownien de Dyson peut donc être un outil pour simuler ces distributions, à comparer avec d'autres schémas statiques développés par exemple dans [4].

De nombreuses extensions ou variantes de ces modèles pourront être explorées (en 2 ou 3 dimensions, en variant le potentiel, le type d'interaction etc.) Selon les goûts de chacun, on pourra mettre l'accent sur les aspects computationnels ou sur les preuves théoriques des propriétés mises en évidence.

## Références

- [1] A. Doucet et al., Sequential Monte Carlo in practice, Springer (2001)
- [2] S. S. Singh et al., Filters for spatial point processes, SIAM Journal of control and optimization, Vol. 48, No. 4 (2009)
- [3] X. H. Li et G. Menon, Numerical Solution of Dyson Brownian Motion and a Sampling Scheme for Invariant Matrix Ensembles, J. Stat. Phys. (2013)
- [4] S. Olver, R. Rao Nadakuditi, T. Trogdon, Sampling Unitary Ensembles (2014)