Des monstres et des trésors

Ce sujet est particulièrement adapté à un couplage stage d'IMPACT/Mémoire de M2.

Encadrement :
Rémi Bardenet, CNRS et CRIStAL, remi.bardenet@gmail.com
Nicolas Wicker, Univ. Lille et Laboratoire Painlevé, nicolas.wicker@math.univ-lille1.fr

Objectif : placer de manière aléatoire des ressources rares (trésors, monstres très forts) dans un jeu vidéo dont l'espace est modélisé par un graphe. Cela peut être dit autrement : comment sélectionner de manière aléatoire k sommets bien espacés pris dans un graphe fini $G(V,E)$?

Les outils : Soit L est le laplacien du graphe $G(V,E)$: $L = D - A$ où D est la matrice diagonale des degrés des sommets et A la matrice d'adjacence. Dans la littérature, on trouve des noyaux permettant d'obtenir une mesure de proximité entre chaque paire de sommets. Deux noyaux classiques sont $K_1 = L^\dagger$ pseudo-inverse de L (Klein and Randic, 1993) et $K_2 = \exp\{\lambda L\}$ (Kondor and Lafferty, 2002), avec λ à fixer. On pourra aussi s'intéresser au noyau introduit par Burton et Pemantle (1993) pour caractériser la distribution uniforme sur les arbres couvrants d'un graphe.

À partir d'un noyau, on peut obtenir une loi sur les k-uplets de sommets, dont la loi de probabilité est donnée par : $p(v_1,\ldots,v_k) \propto \det\left(K(i,j)_{i,j\in v_1,\ldots,v_k}\right)$ avec $v_1,\ldots,v_k$ est un sous-ensemble de k sommets de G. Le déterminant va permettre de pénaliser l'usage de sommets trop proches, ce qui correspond bien à l'objectif recherché.

Ce qu'il faudra faire :

- comparer les mérites respectifs des différents noyaux que l'on peut avoir sur les graphes.
- sur un ou plusieurs noyaux regarder ce qui se passe pour des cas simples, comme un ensemble de cliques ou une suite de segments par exemple.
- simuler la loi ainsi obtenue.

Références

R.I. Kondor and J. Lafferty. Diffusion Kernels on Graphs and Other Discrete Input Spaces. Proc. Int'l Conf. on Machine Learning (ICML), 2002.

D.J. Klein and M. Randic. Resistance distance. Journal of Mathematical Chemistry. 12 : 81-95, 1993.

R.M. Burton and R. Pemantle. Local characteristics, entropy and limit theorems for spanning trees and domino tilings via transfer impedances. Ann. Probab. 21, 1329–1371, 1993.