THÉORIE LOGARITHMIQUE DU POTENTIEL, POLYNÔMES ORTHOGONAUX ET MATRICES ALÉATOIRES

Le but de ce mémoire est double. Dans un premier temps, on étudiera la répartition asymptotique des zéros de familles de polynômes orthogonaux classiques [?] quand le degré du polynôme tend vers l'infini. Un exemple de résultat est le suivant :

Theorem . *Soit $x_1, \ldots, x_n$ les n racines d'un polynôme de Jacobi. Alors pour toute fonction continue sur $[-1,1]$ on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ = \ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} f(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Autrement dit, les racines des polynômes de Laguerre de haut degré sont asymptotiquement distribuées suivant la loi de l'arc-sinus. D'autres lois limite apparaissent pour d'autres familles de polynômes telles Laguerre, Hermite, Meixner-Pollaczek...etc. Un point de vue unificateur utilisant la théorie du potentiel logarithmique a récemment été exposé dans le livre [?]. L'idée est de considérer les racines des polynômes comme les minimisateurs d'une certaine fonctionnelle d'énergie.

Dans un deuxième temps, on pourra utiliser cette approche potentialiste pour résoudre d'autres problèmes statistiques, cette fois-ci dans le cadre des matrices aléatoires [?]. Par exemple, on pourra répondre à la question suivante [?] : quelle est la probabilité d'une grande matrice symétrique d'être définie positive ?

Contact: `simon@math.univ-lille1.fr` (Thomas Simon, Bureau M305)

References

[1] G. W. Anderson, A. Guionnet et O. Zeitouni. An introduction to random matrices. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 118. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
[2] D. S. Dean et S. N. Majumdar. Extreme value statistics of eigenvalues of Gaussian random matrices. Phys. Rev. E. **77**, 041108, 2008.
[3] J. Faraut. Loi du demi-cercle de Wigner et polynômes de Laguerre. *Sémin. Congr.* **16**, Soc. Math. France, 95-108, 2008.
[4] J. Faraut. Random matrices and orthogonal polynomials. A paraître, 2012.
[5] G. Szegö. Orthogonal polynomials. AMS Publications **23**, 1967.